Korešpondenčný matematický seminár

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Univerzita Komenského

Slovenská komisia Matematickej olympiády

Jednota slovenských matematikov a fyzikov

Milí študenti, učitelia a ostatní matematickí nadšenci!

Dostávate do rúk úvodný leták zimnej časti 35. ročníka Korešpondenčného Matematického Seminára (KMS). Táto súťaž organizovaná občianskym združením Trojsten na pôde Fakulty matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave (FMFI UK) je pre stredoškolákov jedinečnou príležitosťou na zdokonalenie svojich matematických schopností a logického myslenia. Zručnosti a skúsenosti získané pri riešení tohto seminára, prípadne pri účasti na záverečnom sústredení, sú veľmi cennou devízou aj pri riešení Matematickej olympiády (MO). Mladším a začínajúcim študentom je určená kategória ALFA, pre starších a skúsenejších je kategória BETA. Každý môže, samozrejme v rámci svojich možností, riešiť obidve kategórie. Podrobnejšie informácie o jednotlivých kategóriách nájdete v pravidlách. Pre tých, čo majú vyššie ambície a chceli by uspieť na celoštátnom kole MO-A je určený seminár *i*KS (Medzinárodný korešpondenčný seminár), ktorý organizujú vedúci KMS v spolupráci s českými kolegami z Matematického korespondenčního semináře. Tento seminár má veľmi špecifický cieľ, ktorým je príprava študentov na CK MO-A a aj na Medzinárodnú matematickú olympiádu. Ak máte akékoľvek otázky alebo pripomienky, smelo nás kontaktujte e-mailom na adrese `kms@kms.sk`, prípadne ich pošlite písomne na adresu uvedenú pod zadaniami.

Veľa úspechov a radosti z riešenia vám želajú

vaši organizátori

Pravidlá KMS

Pozor, pravidlá sa od minulého ročníka zmenili.

Všeobecné informácie o korešpondenčnom matematickom seminári

Súťaž sa skladá z dvoch nezávislých častí — zimnej a letnej. Každá z nich prebieha v rámci školského polroka. Na konci každej časti budú najúspešnejší riešitelia pozvaní na záverečné sústredenie. Každá časť pozostáva z troch sérií úloh. Zadania prvých dvoch sérií máte pred sebou a zadania tretej pošleme tým, ktorí nám pošlú prihlášku. Úlohy budú obodované počtom bodov od 0 po 9. Body sa pritom udeľujú aj za čiastkové či neúplné riešenia. Za každú sériu sa riešiteľovi do poradia započíta 5 úloh s najväčším bodovým ziskom.

Kategórie ALFA a BETA

Na to, aby si vedel, ktoré príklady môžeš riešiť, potrebuješ poznať svoj koeficient κ. Tento koeficient si môžeš vypočítať ako $\kappa = r + u + c$, kde číslo r je tvoj ročník, číslo u je počet tvojich úspešných semestrov a číslo c je počet tvojich účastí na celoštátnom kole matematickej olympiády. Semester považuj za úspešný, ak sa ti počas neho podarilo získať pozvánku na sústredenie KMS, alebo si sa ho zúčastnil ako náhradník.

Kategóriu ALFA môžu riešiť len študenti stredných škôl, ktorí sa nezúčastnili celoštátneho kola matematickej olympiády a ktorých koeficient κ je najviac 3.

Kategóriu BETA môžu riešiť všetci (aj zahraniční) študenti stredných škôl. Riešitelia ALFY sa vo výsledkovej listine BETY objavia až po sérii, v ktorej pošlú aspoň jednu z úloh 8, 9 alebo 10.

Kategória ALFA

Pre riešiteľov kategórie ALFA sú určené príklady 1–7. Úlohu číslo 1 môžu súťažne riešiť len študenti s $\kappa \leq 1$ a úlohu číslo 2 len študenti s $\kappa \leq 2$. Ostatné úlohy (3–7) môžu riešiť všetci riešitelia kategórie ALFA.

Žiaci základných škôl nebudú na sústredenie pozvaní.

Kategória BETA

Pre riešiteľov kategórie BETA sú určené príklady 4–10. Úlohu číslo 4 môžu súťažne riešiť len študenti s $\kappa \leq 4$ a úlohu číslo 5 len študenti s $\kappa \leq 7$. Ostatné úlohy (6–10) môžu riešiť všetci riešitelia kategórie BETA.

Pozývanie na sústredenia

Po zimnej časti sa uskutočnia dve sústredenia pre najúspešnejších riešiteľov oboch kategórií ALFA a BETA. Na každé z nich bude pozvaných aspoň 30 najlepších riešiteľov príslušnej kategórie. Ostatní riešitelia môžu byť pozvaní ako náhradníci.

Po letnej časti sa uskutoční *jedno* sústredenie spoločné pre obe kategórie. Z každej kategórie bude na sústredenie pozvaných aspoň 15 najúspešnejších riešiteľov. Ostatní riešitelia môžu byť pozvaní ako náhradníci.

Pokyny pre riešiteľov

- Príklady rieš samostatne. Riešenie každej úlohy riadne zdôvodni. V prípade, že v časti či celom riešení používaš odbornú literatúru, uveď jej názov, autora, vydavateľstvo, rok vydania a stranu. Samozrejme, aj v tomto prípade zašli kompletné riešenie. Za riešenie využívajúce výpočtovú techniku spravidla nedostaneš veľa bodov.
- Riešenia posielaj do termínu odoslania série. Ak posielaš riešenia z územia mimo Slovenskej republiky, treba to stihnúť do uvedeného zahraničného termínu. Riešenia odoslané po termíne odoslania (rozhodujúca je pečiatka na obálke) spôsobujú značné organizačné problémy, vyhradzujeme si preto právo udeliť nula bodov za všetky riešenia odoslané po termíne.
- Za riešenie odoslané po termíne sa považuje aj akékoľvek riešenie odovzdané organizátorom osobne.
- Riešenie každého príkladu píš na samostatný papier formátu A4. Ku každému príkladu uveď svoje meno, triedu, školu a adresu! Vítané sú aj riešenia v angličtine a češtine a riešenia písané v TEXu. Z organizačných dôvodov nebudú opravované riešenia písané v iných jazykoch.
- Opravené, obodované a okomentované riešenia spolu so vzorovými riešeniami a prípadnou ďalšou korešpondenciou Ti môžu byť zasielané domov, do školy alebo na inú adresu. Svoju voľbu vyznač v návratke. V prípade, ak chceš korešpondenciu posielať inde ako do školy, je potrebné zaslať nám s návratkou aj tri obálky (najlepšie formátu A5) s vypísanou adresou (známky nie sú potrebné).
- Nedodržanie týchto pravidiel bude viesť k postihu.
- Pokiaľ máš dojem, že tvoje riešenie bolo nesprávne obodované, pošli čo najskôr písomnú sťažnosť. Nezabudni k nej priložiť aj originál sporného riešenia.
- Ak ti nie je v zadaniach čokoľvek jasné, alebo máš akékoľvek pochybnosti, netreba sa báť spýtať sa nás. Ideálny spôsob je zaslanie e-mailu na `kms@kms.sk`, prípadne listu na známu adresu KMS, OATČ KAGDM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava.

Elektronické posielanie riešení

Presný návod na ich odovzdávanie nájdeš po prihlásení na stránke `kms.sk/eriesenia`. Pre elektronické posielanie riešení platia nasledovné pravidlá.

- Termín na odovzdanie je vždy v deň termínu odoslania série o **17:00**. Po tomto čase už elektronické posielanie nie je možné. Tento jednotný termín sa týka aj zahraničných riešiteľov.
- Akceptované sú iba riešenia vo formáte pdf. Pri ich tvorbe je ideálne použiť TEX, prípadne export do formátu pdf z iných aplikácií.
- Na stránke `kms.sk/eriesenia` je možné (po prihlásení) vyplniť **elektronickú prihlášku**. Nebudeš ju tak musieť zasielať písomne. Je však potrebné (v prípade posielania korešpondencie inde ako do školy) zaslať nám obálky ako doteraz. Opravené príklady sa Ti totiž budú späť posielať klasickým spôsobom.

Prednášky

Riešiteľom z celého Slovenska odporúčame navštíviť Klub Trojstenu, ktorý sa uskutoční v Bratislave dňa 9. novembra 2013 (po Fyzikálnom Náboji). Bližšie informácie nájdete v pozvánke, ktorú čoskoro zašleme vám alebo na vašu školu, a tiež na internetovej stránke `klub.trojsten.sk`.

.... TU ODSTRIHNI !!! ....

Prihláška do zimnej časti KMS 2013/2014 – **poslať spolu s 1. sériou!**

Meno a priezvisko: .... Dátum narodenia: ....
Škola: .... Trieda: ....
Počet účastí na celoštátnom kole MO: ....
Adresa domov: ....
Adresa pre poštu (domov – internát – škola): ....
Tel. domov: .... mobil(vlastný): ....
e-mail: ....

Pozor! Podmienkou posielania korešpondencie domov je zaslanie 3 obálok A5 s adresami!

Zadania 1. série zimnej časti KMS 2013/2014

Zoznámte sa s Montym Walshom. Tento nebojácny kovboj je už dlhé roky postrachom všetkých zloduchov divokého západu. Stretávame ho v momente, keď sa vybral zo svojej chatrče nakúpiť zásoby do neďalekého mestečka Oakville.

Kategória ALFA

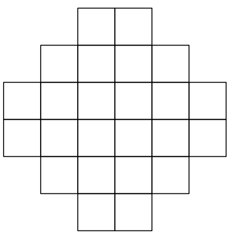
Úloha č. 1: ($\kappa \leq 1$)
Monty sa vybral na nákup do miestneho salónu. Mal so sebou zásobu všetkých možných mincí, ktoré sa na divokom západe používajú. Mince na divokom západe majú hodnoty — 1c, 2c, 5c, 10c, 20c, 50c, 1\$, 2\$. Monty zistil, že nech sa akokoľvek snažil, tak cenu nákupu nevedel zaplatiť presne štyrmi (nie nutne rôznymi) mincami. Koľko najmenej mohol stáť Montyho nákup, ak viete, že stál aspoň 5 centov a Monty mal pri sebe desať kusov z každého druhu mincí?

Úloha č. 2: ($\kappa \leq 2$)
Po nákupe išiel Monty do indiánskej osady kmeňu Goniometrov pozrieť svojho kamaráta Sinetua. Územie, na ktorom osada leží, má tvar rovnoramenného trojuholníka ABC so základňou AB a ramenami AC a BC. Navyše na strane BC sa nachádza totem T a na strane AC je zapichnutý kôl K tak, že priamka TK je kolmá na stranu AC. Taktiež platí, že vzdialenosť od kola K po totem T je rovnaká ako vzdialenosť od totemu T po vrchol B. Vedeli by ste len na základe týchto informácií zistiť veľkosť uhla KBA?

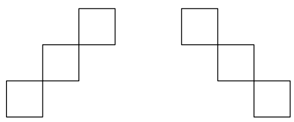
Úloha č. 3: ($\kappa \leq 3$)
Keď Monty dorazil do osady, ostal zarazený ako kôl do zeme. Celá osada bola totiž ľudoprázdna. Až po chvíli hľadania našiel celý kmeň zbehnutý okolo šamana. Ten sa totiž rozhodol vzdelávať súkmeňovcov svojským spôsobom. Zakopal fajku mieru (dôležitý predmet pri diplomatických aj voľnočasových aktivitách indiánov) a je ochotný ju vrátiť, až keď vyriešia nasledujúci hlavolam. Majú nájsť všetky také päťciferné čísla s ciferným zápisom $\overline{abcde}$, pre ktoré platí, že ich zvyšok po delení 2 je a, zvyšok po delení 3 je b, zvyšok po delení 4 je c, zvyšok po delení 5 je d a zvyšok po delení 6 je e. Pomôžte indiánom nájsť všetky takéto čísla.

Úloha č. 4: ($\kappa \leq 4$)
Od šamana sa Monty spolu so Sinetuom vybrali za miestnym geometrom Rysuetom. Ten mal v piesku pred sebou vyznačené dva rôzne body A a B. Snažil sa nájsť bod C tak, aby body A, B a C tvorili pravouhlý trojuholník s pravým uhlom pri vrchole A. Má k dispozícii kružidlo, do ktorého vie nabrať vzdialenosť medzi ľubovoľnými dvoma bodmi a narysovať kružnicu s nabraným polomerom a zvoleným stredom. Niekde však stratil svoje pravítko, a tak nevie rysovať rovné čiary. Pomôžte mu nájsť bod C len s pomocou jeho kružidla a vášho umu.

Úloha č. 5: ($\kappa \leq 7$)
Potom, čo Monty so Sinetuom pomohli Rysuetovi, vybrali sa pozrieť kamarátku Parabollu. Tá práve ušila indiánsku deku skladajúcu sa z 24 malých štvorcov (pozri Obr. 1). Niektoré z týchto štvorčekov chce vyfarbiť špeciálnou indiánskou farbou. Miestny šaman ju však varoval: musí to urobiť tak, aby nevznikla žiadna trojica vyfarbených štvorčekov idúcich za sebou v diagonálnom smere (pozri Obr. 2), inak by mohla privolať zlých duchov. Koľko najviac štvorčekov môže byť vyfarbených?



Obr. 1



Obr. 2

Úloha č. 6:
Po návšteve indiánskej osady sa Monty vrátil späť do Oakvillu. Ihneď si všimol, že z miestnej banky stúpa kúdol čierneho dymu. Šerif, ktorý už bol na mieste činu, oboznámil Montyho s tým, že sa jedná o bankovú lúpež. Banditi ukradli z trezoru dve vrecia so zlatými tehličkami. V prvom vreci bolo a tehličiek a v druhom vreci b tehličiek. Navyše si bankár, vášnivý počtár, zapamätal, že číslo $a + 11b$ je deliteľné číslom 13, a že číslo $a + 13b$ je deliteľné číslom 11. Lúpež ho však natoľko zaskočila, že zabudol na to, koľko tehličiek bolo v jednotlivých vreciach. Zaujímalo by ho, aký najmenší lup si mohli banditi odniesť. Pomôžte mu a zistite, akú najmenšiu hodnotu môže nadobúdať súčet $a + b$, ak viete, že čísla a a b sú kladné, celé a spĺňajú vzťah, ktorý si zapamätal bankár.

Úloha č. 7:
Šerif nechal v okradnutej banke svojho zástupcu a vydal sa s Montym na prechádzku po meste. Toho po chvíli rozhovoru zaujal nový šerifov odznak. Na rozdiel od klasických hviezdicových odznakov mal tento odznak tvar päťuholníka $ABCDE$. Navyše mal niekoľko zaujímavých vlastností. Strany AB a EA mali rovnakú dĺžku, uhly pri vrcholoch B a E boli pravé a zvyšné tri strany BC, CD a DE mali tiež rovnakú dĺžku (ale nie nutne rovnakú ako strany AB a EA). Dokážte, že pre odznak s takýmito vlastnosťami platí, že vzdialenosť od vrchola A k vrcholu B je rovnaká, ako vzdialenosť od vrchola A k priesečníku priamok BD a CE.

Kategória BETA
Úlohy číslo **4, 5, 6, 7** sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

Úloha č. 8:
Monty so šerifom išli do salónu na pivo. Pri vedľajšom stole si všimli starého Harryho, ako hrá sám pexeso. Pexeso sa hrá nasledovne. Harry najskôr rozloží na stôl $2n$ kartičiek pexesa otočených obrázkom dole.[1] V každom ťahu hráč postupne otočí dve kartičky. Ak sú rovnaké, zoberie si ich. Ak sú rôzne, otočí ich naspäť. Harry sa snažil pozbierať všetky kartičky na čo najmenej ťahov. Koľko najmenej ťahov potrebuje Harry, ktorý má mimo iného perfektnú pamäť, na to, aby pozbieral všetky kartičky, nech je pexeso na začiatku rozložené akokoľvek?

Úloha č. 9:
Zo salóna sa Monty so šerifom vydali späť do nedávno vykradnutej banky. Tam práve šerifov zástupca za pomoci bankára dokreslil skicu tváre jedného z banditov podieľajúceho sa na krádeži. Monty z obrázku ihneď rozpoznal Krivozubého Tonyho, šéfa bandy Drzohubých. Bola to už ich tretia lúpež za posledný mesiac, a tak sa Monty rozhodol, že skúsi týchto nebezpečných kriminálnikov dostať za mreže. Ihneď sa vybral do miestnych stajní po svojho koňa. Tam si všimol zaujímavú hru jedného z kovbojov. Na veľkej kruhovej ohrade mal vyznačené tri rôzne body A, B a C. Dnu do ohrady si na zem nakreslil bod X. Priesečníky priamok BX a CX s ohradou rôzne od B a C si označil postupne K a L. Priesečníky priamky LK s priamkami AB a CA si označil postupne E a F. Nakoniec si zistil, či sa kružnice opísané trojuholníkom AFK a AEL dotýkajú. Ak sa dotýkali, tak miesto, kde ležal bod X, vyfarbil červenou farbou. Potom zmazal všetky body okrem bodov A, B a C, zvolil si nový vnútorný bod ohrady a pustil sa do hry znova. Monty sa zamyslel nad tým, ktoré body vnútra ohrady by boli vyfarbené na červeno, ak by si kovboj za bod X postupne zvolil všetky vnútorné body ohrady. Pomôžte Montymu zodpovedať jeho otázku.

Úloha č. 10:
Pred odchodom sa ešte Monty zastavil v svojej chatrči na kraji mesta, aby si zbalil veci na cestu. Našiel skoro všetko čo potreboval, no nenašiel žiadny zo svojich obľúbených polynómov. Pre každý z Montyho obľúbených polynómov $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ platí, že koeficient a_n je nenulový a n je aspoň jedna. Ďalej platí, že všetky koeficienty $a_0,\ a_1, \ldots, a_n$ sú racionálne čísla, a že $p(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = 0$. Posledné, čo vieme o polynóme $p(x)$ je to, že je najmenšieho možného stupňa (t.j. n je najmenšie možné). Nájdite aspoň jeden Montyho obľúbený polynóm. Nezabudnite dokázať, že je najmenšieho možného stupňa.

Odporúčaná literatúra

Nielen začínajúcim riešiteľom odporúčame preštudovať si nasledujúce knihy o riešení matematických problémov:
Hecht, T. – Sklenáriková, Z.: Metódy riešenia matematických úloh
Larson, L. C.: Metódy riešenia matematických problémov. ALFA, Bratislava, 1990.
Zoznam ďalšej odporúčanej literatúry (aj pre pokročilých riešiteľov), či informácie o jej zapožičaní z našej knižnice nájdete na internete na adrese `kms.sk/kniznica`.

Fórum o príkladoch

Pre nedočkavcov funguje na stránke KMS diskusné fórum o príkladoch z KMS. Nájdete ho na adrese `kms.sk/forum` a môžete na ňom čoskoro po termíne danej série začať diskutovať o vašom najobľúbenejšom alebo najmenej obľúbenom príklade, prípadne zverejniť svoje riešenie pre ostatných riešiteľov.

Termín odoslania riešení: **7. október 2013** (pre zahraničie 4. október 2013)
Naša adresa: KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava. `www.kms.sk`

[1] Na každom pexese je práve jeden obrázok. Obrázkov je n a každý z nich je práve na dvoch pexesách.

Zadania 2. série zimnej časti KMS 2013/2014

Kovboj Monty Walsh sedel na svojom tátošovi a uháňal po širých pláňach. Boli to už tri dni odkedy opustil Oakville a vydal sa po stope bankového lupiča Krivozubého Tonyho a jeho bandy Drzohubých. Aj keď bolo meno Montyho Walsha medzi kriminálnikmi dobre známe, jeho tvár bola skoro všetkým neznáma. Preto sa rozhodol, že sa zahrá na záporáka a infiltruje sa medzi Drzohubých. Vymyslel si krycie meno Walty Mash a pustil sa do roboty.

Kategória ALFA

Úloha č. 1: ($\kappa \leq 1$)
Drzohubých je na divokom západe kopa a nie všetci sa poznajú. Preto na identifikáciu používajú tajný symbol. Montymu sa z rôznych zdrojov podarilo získať útržkové údaje o tomto symbole. Dozvedel sa, že symbolom je trojuholník ABC, ktorý má vrcholy označené v tomto poradí proti smeru hodinových ručičiek. Ďalej zistil, že veľkosť uhla pri vrchole B je $20°$, a že strana BC meria 5 centimetrov. Ako posledné zistil, že kružnica opísaná tomuto trojuholníku má polomer 3 centimetre. Pomôžte Montymu a skonštruujte tento trojuholník. Zároveň túto konštrukciu aj popíšte. Nezabudnite nájsť všetky riešenia a zdôvodniť, že iné neexistujú.

Úloha č. 2: ($\kappa \leq 2$)
S tajným symbolom vo vrecku sa Monty vybral priamo k táborisku Krivozubého Tonyho a niekoľkých ďalších Drzohubých. Ukázal im papier so symbolom a ihneď ho vzali medzi seba. Sedeli okolo švajčiarskej čokolády, ktorú nedávno ulúpili a rozmýšľali, ako si ju rozdeliť. Čokoláda mala tvar štvorca a tvorilo ju 6×6 menších tabličiek. Chceli ju rozdeliť na deväť kúskov tak, aby delili len pozdĺž tabličiek a aby im nič neostalo. Navyše má mať každý z týchto kúskov tvar obdĺžnika (aj štvorec je obdĺžnik). Banditi sa snažili rozdeliť čokoládu podľa týchto pravidiel tak, aby bol každý kúsok iného tvaru.[2] Monty sa na chvíľku zamyslel, a potom prehlásil, že to nie je možné. Vedeli by ste aj vy dokázať, že sa vždy nájdu aspoň dva rovnaké kúsky?

Úloha č. 3: ($\kappa \leq 3$)
Monty si svojou šikovnosťou rýchlo získal priazeň Drzohubých aj samotného Tonyho. O niekoľko dní sa banditi rozhodli prepadnúť jeden z troch dostavníkov, ktoré putovali z Longcreeku do Smallvillu. Časť bandy sa vydala na výzvedy a vrátili sa s týmito informáciami. V prvom dostavníku bolo p vriec dolárov, v druhom bolo $p^2 + 2$ vriec dolárov a v treťom bolo $p^3 + 2$ vriec dolárov. Navyše zvedi zistili, že v prvom aj druhom dostavníku je prvočíselný počet vriec. Banditi nechcú okradnúť dostavník s prvočíselným počtom vriec, problémy s následným delením lupu by im za to určite nestáli. Pomôžte Montymu dokázať, že počet vriec v treťom dostavníku je tiež určite prvočíslo a zabráňte tak prepadu.

Úloha č. 4: ($\kappa \leq 4$)
Po nevydarenej lúpeži sa Krivozubý Tony nejakú dobu rozčuľoval, no časom z neho hnev vyprchal. Rozhodol sa, že si zlepší náladu tým, že potrápi Waltyho hlavu. Dal mu nasledovnú úlohu. Na svojom tele má n jaziev. Toto číslo n je dvojciferné a navyše číslo $n^3 - n$ je deliteľné číslom 100. Montyho úloha je zistiť, koľko jaziev môže mať Tony. Zistite aj vy, ktoré čísla n vyhovujú zadaniu. Nezabudnite prísť na všetky riešenia.

Úloha č. 5: ($\kappa \leq 7$)
Jedného večera Drzohubí vybrali vrece plné najvzácnejších lupov. Chvíľu sa v ňom prehrabovali, a potom vytiahli vzácnosť, ktorú už dávno ulúpili Divokozápadskej matematickej spoločnosti. Bol to všeobecný rovnobežník. Navyše bol nad každou zo štyroch strán rovnobežníka vztýčený štvorec (smerom von z rovnobežníka). Banditi si už dávno všimli, že stredy týchto štvorcov tvorili opäť štvorec, nech bol rovnobežník všeobecný ako len chcel. Zaujímalo by ich však, prečo to tak je. Pomôžte Montymu zapôsobiť na Drzohubých a dokážte, že stredy štyroch štvorcov vždy tvoria štvorec.

Úloha č. 6:
Netrvalo dlho a Montymu začali všetci v bande dôverovať. A tak mu povedali ich veľký plán. Chystali sa vylúpiť obrovskú galériu v New Orleans. Táto galéria má tvar konvexného n-uholníka. V galérii sú veľmi vzácne obrazy, pričom každý má veľkosť jediného bodu. Obrazy do galérie umiestňovali nasledovne. Zobrali si jeden z vrcholov n-uholníka a postupne vztýčili kolmice na všetky priamky určené stranami n-uholníka nesusednými s vybraným vrcholom. Ak niektorá z piat týchto kolmíc padla priamo na stranu n-uhoníka, tak na to miesto dali obraz (mohol to byť aj krajný bod strany). Túto procedúru postupne aplikovali na všetky vrcholy galérie. Môže sa teoreticky stať, že v tejto galérii nie sú žiadne obrazy (t.j., že všetky päty kolmíc budú mimo strán n-uholníka)?

[2] kúsky, ktoré sa líšia iba otočením, považujeme za rovnaké

Úloha č. 7:
Ďalšie ráno sa Monty potichu vyplížil zo spiaceho táboriska a vybral sa na dlhú cestu do New Orleans. Mal v pláne tam nastražiť pascu na Drzohubých a dostať ich za mreže. Rozhodol sa, že sa cestou zastaví v indiánskej osade kmeňa Geometrov a poprosí tam o pomoc svojho kamaráta Sinetua. Spoločne určite vymyslia ako banditov dolapiť. Len čo dorazil do osady, stretol miestneho geometra Rysueta, ktorý sa opäť pasoval s geometrickým problémom. Na zemi mal nakreslenú kružnicu k so stredom O. Dnu v kruhu vymedzenom kružnicou k ležal bod A a mimo tohto kruhu ležal bod B. Navyše platilo, že body A, B a O neležia na jednej priamke. Rysueto chcel nájsť všetky priesečníky priamky určenej bodmi A a B a kružnice k. Stále mal však zapatrošené svoje pravítko, a tak mal k dispozícii iba kružidlo. Do neho vie nabrať vzdialenosť medzi ľubovoľnými dvoma narysovanými bodmi a nakresliť kružnicu s nabraným polomerom a ľubovoľným stredom. Pomôžte Rysuetovi nájsť všetky priesečníky priamky AB a kružnice k len za pomoci kružidla a vášho umu. Nezabudnite, že bez pravítka neviete rysovať rovné čiary.

Kategória BETA
Úlohy číslo **4, 5, 6, 7** sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

Úloha č. 8:
Rysueto poďakoval Montymu za jeho pomoc a pokračoval vo svojom rysovaní. Monty sa vybral pohľadať Sinetua. Našiel ho ako s ďalšími indiánmi sedí pri okrúhlom stole. Sedelo ich tam dokopy 1894. Sinetu mal v hrsti n mincí. Zvyšní indiáni mali hrste prázdne. Potom sa začali hrať nasledovnú hru. V každom ťahu si vybrali jedného indiána, ktorý mal v hrsti aspoň dve mince. On potom jednu zo svojich mincí posunul indiánovi po svojej ľavici a jednu indiánovi po svojej pravici a zvyšné mince si nechal. Tým jeden ťah skončil. Takto pokračovali až kým sa medzi nimi nenachádzal žiaden, ktorý by mal aspoň dve mince. Vtedy hra skončila a šli si zabafkať na fajke mieru. Dokážte, že ak n je rovné 1894, tak ich hra nikdy neskončí. Taktiež dokážte, že ak n je menšie ako 1894, tak hra určite niekedy skončí.

Úloha č. 9:
Monty presvedčil indiánov, aby sa hru hrali iba s 1893 mincami, a tak sa už po chvíli mohol porozprávať so Sinetuom. Podelil sa s ním o svoje zážitky a vyložil mu, čo má v pláne. Sinetu ihneď súhlasil, že mu pomôže a odbehol sa zbaliť. Monty išiel zatiaľ pozrieť miestneho šamana. Ten si Montyho a jeho bystrú hlavu už dávno obľúbil, a tak mu rovno zadal jeho najnovšiu úlohu. Monty má dokázať, že pre každé prirodzené číslo n, väčšie ako jedna, existuje n rôznych prirodzených čísel spĺňajúcich nasledovnú podmienku: pre ľubovoľné dve čísla a, b z tejto n-tice platí, že $a - b$ delí $a + b$. Nebuďte mrchožrúti a dokážte to aj vy.

Úloha č. 10:
Monty sa rozlúčil so Šamanom a spolu so Sinetuom sa vydal na dlhú púť do New Orleans. Na cestu si so sebou chceli vziať všetky funkcie f, ktoré sú z reálnych čísel do reálnych a pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$ platí nasledovný vzťah:

$$f(yf(x+y) + f(x)) = 4x + 2yf(x+y).$$

Pomôžte im a nájdite všetky takéto funkcie.

Odporúčaná literatúra

Nielen začínajúcim riešiteľom odporúčame preštudovať si nasledujúce knihy o riešení matematických problémov:
Hecht, T. – Sklenáriková, Z.: Metódy riešenia matematických úloh
Larson, L. C.: Metódy riešenia matematických problémov. ALFA, Bratislava, 1990.
Zoznam ďalšej odporúčanej literatúry (aj pre pokročilých riešiteľov), či informácie o jej zapožičaní z našej knižnice nájdete na internete na adrese `kms.sk/kniznica`.

Fórum o príkladoch

Pre nedočkavcov funguje na stránke KMS diskusné fórum o príkladoch z KMS. Nájdete ho na adrese `kms.sk/forum` a môžete na ňom čoskoro po termíne danej série začať diskutovať o vašom najobľúbenejšom alebo najmenej obľúbenom príklade, prípadne zverejniť svoje riešenie pre ostatných riešiteľov.

Termín odoslania riešení: **4. november 2013** (pre zahraničie 1. november 2013)
Naša adresa: KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava. `www.kms.sk`