Korešpondenčný matematický seminár

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Univerzita Komenského

Slovenská komisia Matematickej olympiády

Jednota slovenských matematikov a fyzikov

Milí študenti, učitelia a ostatní matematickí nadšenci!

Dostávate do rúk úvodný leták letnej časti 33. ročníka Korešpondenčného Matematického Seminára (KMS). Táto súťaž organizovaná občianskym združením Trojsten na pôde Fakulty matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave (FMFI UK) je pre stredoškolákov jedinečnou príležitosťou na zdokonalenie svojich matematických schopností a logického myslenia. Zručnosti a skúsenosti získané pri riešení tohto seminára, prípadne pri účasti na záverečnom sústredení, sú veľmi cennou devízou aj pri riešení Matematickej olympiády (MO). Mladším a začínajúcim študentom je určená kategória ALFA, pre starších a skúsenejších je kategória BETA. Každý môže, samozrejme v rámci svojich možností, riešiť obidve kategórie. Podrobnejšie informácie o jednotlivých kategóriách nájdete v pravidlách. Pre tých, čo majú vyššie ambície a chceli by uspieť na celoštátnom kole MO-A je určený nový seminár *i*KS (Medzinárodný korešpondenčný seminár), ktorý organizujú vedúci KMS v spolupráci s českými kolegami z Matematického korespondenčního semináře. Tento seminár má veľmi špecifický cieľ, ktorým je príprava študentov na CK MO-A a aj na Medzinárodnú matematickú olympiádu. Ak máte akékoľvek otázky alebo pripomienky, smelo nás kontaktujte e-mailom na adrese `kms@kms.sk`, prípadne ich pošlite písomne na adresu uvedenú pod zadaniami.

Veľa úspechov a radosti z riešenia vám želajú

vaši organizátori

Pravidlá KMS

Všeobecné informácie o korešpondenčnom matematickom seminári

Súťaž sa skladá z dvoch nezávislých častí – zimnej a letnej. Každá z nich prebieha v rámci školského polroka. Na konci každej časti budú najúspešnejší riešitelia pozvaní na záverečné sústredenie. Každá časť pozostáva z troch sérií úloh. Zadania prvých dvoch sérií máte pred sebou a zadania tretej pošleme tým, ktorí nám pošlú prihlášku. Úlohy budú obodované počtom bodov od 0 po 9. Body sa pritom udeľujú aj za čiastkové či neúplné riešenia. Za každú sériu sa riešiteľovi do poradia započíta 5 úloh s najväčším bodovým ziskom.

Kategória ALFA

Kategóriu ALFA môžu riešiť len študenti stredných škôl, ktorí sa nezúčastnili celoštátneho kola matematickej olympiády a ktorých koeficient k_α je najviac 3.

Tento koeficient si môžeš vypočítať ako $k_\alpha = r + u$, kde číslo r je tvoj ročník a číslo u je počet tvojich úspešných semestrov (polrokov) pred začiatkom tohoto semestra. Semester považuj za úspešný, ak sa ti počas neho podarilo získať pozvánku na sústredenie KMS, alebo si sa ho zúčastnil ako náhradník.

Úlohu číslo 1 môžu súťažne riešiť len študenti s $k_\alpha \leq 1$ a úlohu číslo 2 len študenti s $k_\alpha \leq 2$. Ostatné úlohy $(3 - 7)$ môžu riešiť všetci riešitelia kategórie ALFA.

V tejto kategórii sa bude zostavovať päť regionálnych výsledkových listín, a to pre regióny východné Slovensko, stredné Slovensko, západné Slovensko, Bratislava a zahraničie. Na záverečné sústredenie bude zvyčajne pozvaných 5 najúspešnejších riešiteľov z každého regiónu Slovenska, ďalších aspoň 5 podľa celkového bodového zisku a najúspešnejší riešitelia Matematickej olympiády. Ďalší riešitelia v poradí budú na sústredenie pozvaní ako náhradníci. Víťazi slovenských regiónov budú odmenení hodnotnými vecnými cenami. Žiaci základných škôl nebudú na sústredenie pozvaní.

Kategória BETA

Kategóriu BETA môžu riešiť všetci (aj zahraniční) študenti stredných škôl. Riešitelia ALFY sa vo výsledkovej listine BETY objavia až po sérii, v ktorej pošlú aspoň jednu z úloh 8, 9, 10 alebo 11.

Svoj koeficient k_β si vyrátaš nasledovne: $k_\beta = o + u_\beta$, kde číslo o je súčet počtu tvojich účastí na celoštátnom kole matematickej olympiády a počtu tvojich umiestnení medzi uspešnými riešiteľmi tohoto kola. Číslo u_β je počet tvojich úspešných semestrov (polrokov) v kategórii BETA, teda tých, za ktoré si bol pozvaný na sústredenie KMS kategórie BETA alebo si sa ho zúčastnil ako náhradník.

Úlohu číslo 5 môžu súťažne riešiť len študenti s $k_\beta = 0$ a úlohu číslo 6 len študenti s $k_\beta \leq 2$. Ostatné úlohy $(7-11)$ môžu riešiť všetci riešitelia.

V tejto kategórii sa bude zostavovať jedna spoločná výsledková listina. Na záverečné sústredenie bude pozvaných aspoň 30 najúspešnejších riešiteľov (z toho najviac 10 zahraničných), ďalší v poradí budú pozvaní ako náhradníci. Prví piati budú odmenení hodnotnými vecnými cenami.

Spoločné pre obe kategórie

- Príklady rieš samostatne. Riešenie každej úlohy riadne zdôvodni. V prípade, že v časti či celom riešení používaš odbornú literatúru, uveď jej názov, autora, vydavateľstvo, rok vydania a stranu. Samozrejme, aj v tomto prípade zašli kompletné riešenie. Za riešenie využívajúce výpočtovú techniku spravidla nedostaneš veľa bodov.
- Riešenia posielaj do termínu odoslania série. Ak posielaš riešenia z územia mimo Slovenskej republiky, treba to stihnúť do uvedeného zahraničného termínu. Riešenia odoslané po termíne odoslania (rozhodujúca je pečiatka na obálke) spôsobujú značné organizačné problémy, vyhradzujeme si preto právo udeliť nula bodov za všetky riešenia odoslané po termíne.
- Za riešenie odoslané po termíne sa považuje aj akékoľvek riešenie odovzdané organizátorom osobne.
- Riešenie každého príkladu píš na samostatný papier formátu A4. Ku každému príkladu uveď svoje meno, triedu, školu a adresu! Vítané sú aj riešenia v angličtine a češtine a riešenia písané v TEXu. Z organizačných dôvodov nebudú opravované riešenia písané v iných jazykoch.
- Opravené, obodované a okomentované riešenia spolu so vzorovými riešeniami a prípadnou ďalšou korešpondenciou Ti môžu byť zasielané domov, do školy alebo na inú adresu. Svoju voľbu vyznač v návratke. V prípade, ak chceš korešpondenciu posielať inde ako do školy, je potrebné zaslať nám s návratkou aj tri obálky (najlepšie formátu A5) s vypísanou adresou (známky nie sú potrebné).
- Nedodržanie týchto pravidiel bude viesť k postihu.
- Pokiaľ máš dojem, že tvoje riešenie bolo nesprávne obodované, pošli čo najskôr písomnú sťažnosť. Nezabudni k nej priložiť aj originál sporného riešenia.
- Ak ti nie je v zadaniach čokoľvek jasné, alebo máš akékoľvek pochybnosti, netreba sa báť spýtať sa nás. Ideálny spôsob je zaslanie e-mailu na `kms@kms.sk`, prípadne listu na známu adresu KMS, OATČ KAGDM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava.

Elektronické posielanie riešení

Presný návod na ich odovzdávanie nájdeš po prihlásení na stránke `kms.sk/eriesenia`. Pre elektronické posielanie riešení platia nasledovné pravidlá.

- Termín na odovzdanie je vždy v deň termínu odoslania série o **17:00**. Po tomto čase už elektronické posielanie nie je možné. Tento jednotný termín sa týka aj zahraničných riešiteľov.
- Akceptované sú iba riešenia vo formáte pdf. Pri ich tvorbe je ideálne použiť TEX, prípadne export do formátu pdf z iných aplikácií.
- Na stránke `kms.sk/eriesenia` je možné (po prihlásení) vyplniť **elektronickú prihlášku**. Nebudeš ju tak musieť zasielať písomne. Je však potrebné (v prípade posielania korešpondencie inde ako do školy) zaslať nám obálky ako doteraz. Opravené príklady sa Ti totiž budú späť posielať klasickým spôsobom.

Náboj KMS

Aj v tomto školskom roku sa môžete tešiť na tradičnú matematickú súťaž – Náboj KMS, ktorý je naplánovaný na piatok 23. marca 2012. Podrobnejšie informácie nájdete onedlho na stránke `kms.sk/naboj` a budú tiež zaslané na vašu školu.

Prednášky

Riešiteľom z celého Slovenska odporúčame navštíviť Klub Trojstenu, ktorý sa uskutoční v Bratislave dňa 24. marca 2012 (po Náboji KMS). Bližšie informácie nájdete v pozvánke, ktorú čoskoro zašleme vám alebo na vašu školu, a tiež na internetovej stránke `www.fks.sk/klub`.

Riešiteľom z okolia Žiliny odporúčame navštíviť Matematický klub (MaK). Ďalšie informácie môžete nájsť na stránke `www.sezam.sk`.

.... TU ODSTRIHNI !!! ....

Prihláška do letnej časti KMS 2011/2012 – **poslať spolu s 1. sériou alebo vyplniť na** `kms.sk/eriesenia`**!**

Meno a priezvisko: .... Dátum narodenia: ....
Škola: ....
Trieda ....
Počet účastí na celoštátnom kole MO: ...., z ktorých bolo ....úspešných
Adresa domov: ....
Adresa pre poštu (domov – internát – škola): ....
Tel. domov: .... mobil (vlastný): ....
e-mail: ....

Pozor! Podmienkou posielania korešpondencie domov je zaslanie 3 obálok A5 s adresami!

Zadania 1. série letnej časti KMS 2011/2012

Kategória ALFA

Úloha č. 1:
Gyro Vynálezca kopíruje v počítači n rovnako veľkých súborov. Počítač mu zobrazuje dva progress bary[1]. Horný ukazuje, koľko percent zo všetkých dát je už skopírovaných. Spodný ukazuje, koľko percent z práve kopírovaného súboru je už skopírovaných. Na začiatku sú oba progress bary na 0%. Koľkokrát sa počas celého kopírovania stane, že budú oba progress bary ukazovať rovnako veľa percent a na koľkých percentách to bude?

Úloha č. 2:
Snehulienka si myslí prvočíslo $p > 7$. Trpaslíci tvrdia, že $p^2 - 1$ je deliteľné číslom 24. Dokážte, že majú pravdu.

Úloha č. 3:
Vlk sľúbil Červenej Čiapočke, že ju nezožerie, ak dokáže, že pre ľubovoľné dve reálne čísla a a b platí

$$\left(a^2 + b^2\right)^3 \geq \left(a^3 + b^3\right)^2.$$

Zachráňte Červenú Čiapočku a dokážte túto nerovnosť.

Úloha č. 4:
Morská panna hrá na pláži hru, ktorej cieľom je prepísať MI na MU. Na začiatku hry má v piesku napísané slovo MI. So slovom, ktoré je napísane v piesku, potom môže robiť nasledujúce úkony:

i) ak sa slovo končí na I, môže na koniec pridať U,

ii) ak sú v slove tri I za sebou, môže ich nahradiť za U,

iii) slovo Mx, kde x je akákoľvek postupnosť písmen, môže nahradiť za Mxx,

iv) dve U za sebou môže zmazať.

Je možné, aby po konečnom počte úkonov ostalo v piesku napísané MU? Ak áno, ako? Ak nie, vysvetlite prečo.

Úloha č. 5:
Nech x, y, z, a, b, c sú reálne čísla a zároveň a, b, c sú nenulové. Ďalej nech

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}, \quad a + b + c = 1 \quad \text{a} \quad a^2 + b^2 + c^2 = 1.$$

Dokážte, že $xy + yz + zx = 0$.

Úloha č. 6:
Popolvár najväčší na svete sa opäť raz hrá sám v humne na sene. Má mriežku veľkosti $2 \times n$ a čísla $1, 2, \ldots, 2n$. Koľkými spôsobmi môže vyplniť mriežku číslami tak, aby každé číslo k, okrem 1 a $2n$, susedilo jednou stranou s $k - 1$ a ďalšou stranou s $k + 1$? Na jedno políčko mriežky ide jedno číslo.

Úloha č. 7:
Okolo táboráka sa posadilo 2011 dievčat a 2012 chlapcov. Každú hodinu sa medzi dvoch ľudí rovnakého pohlavia posadilo dievča, medzi dvoch ľudí rôzneho pohlavia sa posadil chlapec a pôvodné osadenstvo táboráka sa išlo hrať do lesa, takže okolo táboráka bolo vždy práve 4023 ľudí. Dokážte, že po konečnom počte hodín nemôžu zostať okolo táboráka samé dievčatá.

Kategória BETA

Úlohy číslo **5, 6, 7** sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

Úloha č. 8:
O prirodzenom čísle[2] n vieme, že čísla $2n + 1$ a $3n + 1$ sú štvorcami celých čísel. Môže byť potom číslo $5n + 3$ prvočíslom?

[1] indikátor, ktorý ukazuje, koľko percent súboru je skopírovaného
[2] Nulu nepovažujeme za prirodzené číslo.

Úloha č. 9:
Hago má doma kocku s dĺžkou hrany 3, ktorá je rozdelená na 27 rovnakých malých kociek s dĺžkami hrán 1. Hago každé z čísel $1, 2, \ldots, 27$ priradil práve jednej malej kocke. Potom spočítal súčet týchto čísel pre každú trojicu kociek ležiacich na jednej priamke rovnobežnej s nejakou hranou kocky. Takto dostal 27 súčtov. Zistite, koľko najviac z týchto súčtov môže byť nepárnych.

Úloha č. 10:
CéDečka prestalo baviť skákať po nekonečnej šachovnici koňom, ktorý chodí klasicky do tvaru písmena L. Preto si vymyslel (a, b)-koňa, ktorý skáče o a políčok jedným smerom, o b políčok druhým smerom a postavil ho na svoju nekonečnú šachovnicu. Zistite, pre ktoré prirodzené čísla a a b sa jeho (a, b)-kôň vie dostať na vedľajšie políčko, susediace stranou so začiatočným políčkom, na menej ako $a + b$ ťahov.

Úloha č. 11:
Petržlen je guvernérom štátu, kde medzi každými dvoma mestami existuje priame cestné spojenie, bez križovatiek s inými cestami. V štáte je n miest a platí sa mýto v cene x_{ij} za použitie cesty medzi mestami i a j. Cesta medzi dvoma mestami je oboma smermi rovnako drahá. Okružnou cestou nazveme postupnosť n ciest prechádzajúcich cez každé mesto práve raz. Petržlen chce byť spravodlivý, a preto nariadil zákon, ktorý každej okružnej ceste určuje v súčte rovnakú cenu. Dokážte, že potom existujú čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ a $b_1, b_2, \ldots, b_n$ také, že pre každé i, j platí $x_{ij} = a_i + b_j$.

Odporúčaná literatúra

Nielen začínajúcim riešiteľom odporúčame preštudovať si nasledujúce knihy o riešení matematických problémov:
Hecht, T. – Sklenáriková, Z.: Metódy riešenia matematických úloh
Larson, L. C.: Metódy riešenia matematických problémov. ALFA, Bratislava, 1990.
Zoznam ďalšej odporúčanej literatúry (aj pre pokročilých riešiteľov), či informácie o jej zapožičaní z našej knižnice nájdete na internete na adrese `kms.sk/kniznica`.

Fórum o príkladoch

Pre nedočkavcov funguje na stránke KMS diskusné fórum o príkladoch z KMS. Nájdete ho na adrese `kms.sk/forum` a môžete na ňom čoskoro po termíne danej série začať diskutovať o vašom najobľúbenejšom alebo najmenej obľúbenom príklade, prípadne zverejniť svoje riešenie pre ostatných riešiteľov.

Kategória **ALFA**, **BETA**: Termín odoslania riešení je **5. marec 2012** (pre zahraničie 2. marec 2012).

Projekt č. LPP-0103-09 je riešený s finančnou podporou Agentúry na podporu výskumu a vývoja.

Zadania 2. série letnej časti KMS 2011/2012

Kategória ALFA

Úloha č. 1:
Mário dostal na Vianoce špeciálnu omaľovánku. Skladá sa z lichobežníka $ABCD$[3], v ktorom je M stred strany AD a $|CD| = \frac{1}{3}|AB|$. Jeho súrodenci mu však počarbali trojuholník MBD ružovou farbou. Vypočítajte, akú časť lichobežníka tvorí ružová plocha.

Úloha č. 2:
Keď sa Mojo hral s jedlom, našiel v omáčke ostrouhlý trojuholník FUJ. Hneď si všimol, že keď si označí Y pätu výšky z bodu J na stranu FU a S stred strany UJ, tak úsečka YS je rovnobežná so stranou FJ. Pomôžte mu dokázať, že trojuholník FUJ je rovnoramenný.

Úloha č. 3:
Veronika má v záhrade aspoň tri krtince. Tieto krtince majú zaujímavú vlastnosť: Existuje také reálne číslo r, že v každej trojici krtincov sú aspoň dva krtince vzdialené od seba najviac r. Dokážte, že Veronika môže vyznačiť na zemi dva kruhy s polomerom r tak, že ich zjednotenie bude obsahovať všetky krtince.[4]

Úloha č. 4:
Lindu v noci vystrašil trojuholník ABC so 60 stupňovým uhlom pri vrchole A. Hneď, ako sa spamätala, označila si M priesečník priamky AC a osi strany AB. Potom si označila N priesečník priamky AB a osi strany AC. Lindu trojuholník prestane strašiť, až keď dokáže, že $|BC| = |MN|$. Pomôžte jej s tým.

Úloha č. 5:
Kružnica je rozdelená na štyri oblúky. Dokážte, že keď spojíme každú dvojicu stredov daných oblúkov úsečkou, určite vznikne aspoň jedna dvojica navzájom kolmých úsečiek.

Úloha č. 6:
Vnútri konvexného mnohouholníka[5] je bod P, z ktorého vedieme kolmicu na každú priamku určenú nejakou jeho stranou. Dokážte, že aspoň jedna z piat týchto kolmíc leží na obvode daného mnohouholníka.

Úloha č. 7:
Zostrojte štvorec $ABCD$, keď máte daný jeho vrchol A a vzdialenosti jeho vrcholov B a D od daného bodu E.

Kategória BETA

Úlohy číslo **5, 6, 7** sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

Úloha č. 8:
Kružnice k a l ležia v rovnakej polrovine vzhľadom na priamku p, ktorej sa navyše dotýkajú v bodoch A a B. Kružnica m sa dotýka zvonka kružníc k a l v bodoch X a Y. Dokážte, že body A, B, X a Y ležia na spoločnej kružnici.

Úloha č. 9:
Majme štvoruholník vpísaný do kružnice, ktorého osi dvoch rôznych vnútorných uhlov sú rovnobežné. Dokážte, že potom súčet štvorcov dĺžok niektorých jeho dvoch strán je rovný súčtu štvorcov dĺžok jeho zvyšných dvoch strán.

Úloha č. 10:
Nech ABC je trojuholník s opísanou kružnicou k a uhlami α, β, γ postupne pri vrcholoch A, B a C. Označme bod D ležiaci v opačnej polrovine od bodu C vzhľadom na priamku AB, pre ktorý $|\sphericalangle DAB| = \alpha/2$ a $|\sphericalangle DBA| = \beta/2$. Rovnakým spôsobom označíme body E a F pre strany BC a CA. Ukážte, že ak bodom C hýbeme po oblúku AB kružnice k (obsahujúcom bod C), tak sa veľkosť uhla EDF nemení.

Úloha č. 11:
Ortocentrum[6] ostrouhlého trojuholníka ABC si označme H. Dotyčnice ku kružnici nad priemerom BC prechádzajúce bodom A sa dotýkajú danej kružnice v bodoch P a Q. Dokážte, že body P, Q a H ležia na jednej priamke.

[3] Ako to štandardne býva, základňami lichobežníka $ABCD$ sú strany AB a CD.
[4] Krtince chápeme ako body.
[5] Konvexný mnohouholník je taký mnohouholník, ktorého veľkosti všetkých vnútorných uhlov sú menšie ako 180°.
[6] Ortocentrom nazývame priesečník výšok trojuholníka.

Odporúčaná literatúra

Nielen začínajúcim riešiteľom odporúčame preštudovať si nasledujúce knihy o riešení matematických problémov:
Hecht, T. – Sklenáriková, Z.: Metódy riešenia matematických úloh
Larson, L. C.: Metódy riešenia matematických problémov. ALFA, Bratislava, 1990.
Zoznam ďalšej odporúčanej literatúry (aj pre pokročilých riešiteľov), či informácie o jej zapožičaní z našej knižnice nájdete na internete na adrese `kms.sk/kniznica`.

Špeciálne k tejto sérii vám odporúčame prečítať si aj text o počítaní uhlov, ktorý nájdete na adrese `http://kms.sk/~mazo/matematika/pocitanieUhlov.pdf`.

Fórum o príkladoch

Pre nedočkavcov funguje na stránke KMS diskusné fórum o príkladoch z KMS. Nájdete ho na adrese `kms.sk/forum` a môžete na ňom čoskoro po termíne danej série začať diskutovať o vašom najobľúbenejšom alebo najmenej obľúbenom príklade, prípadne zverejniť svoje riešenie pre ostatných riešiteľov.

Kategória **ALFA**, **BETA**: Termín odoslania riešení je **2. apríl 2012** (pre zahraničie 30. marec 2012).

Naša adresa: KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava. `kms.sk`

Projekt č. LPP-0103-09 je riešený s finančnou podporou Agentúry na podporu výskumu a vývoja.