Korešpondenčný matematický seminár

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Univerzita Komenského

Slovenská komisia Matematickej olympiády

Jednota slovenských matematikov a fyzikov

Milí študenti, učitelia a ostatní matematickí nadšenci!

Dostávate do rúk úvodný leták letnej časti 32. ročníka Korešpondenčného Matematického Seminára (KMS). Táto súťaž organizovaná občianskym združením Trojsten na pôde Fakulty matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave (FMFI UK) je pre stredoškolákov jedinečnou príležitosťou na zdokonalenie svojich matematických schopností a logického myslenia. Zručnosti a skúsenosti získané pri riešení tohto seminára, prípadne pri účasti na záverečnom sústredení, sú veľmi cennou devízou aj pri riešení Matematickej olympiády (MO). Mladším a začínajúcim študentom je určená kategória ALFA, pre starších a skúsenejších je kategória BETA a pre tých, čo majú vyššie ambície a chceli by uspieť na celoštátnom kole MO-A je určená kategória GAMA. Táto kategória má veľmi špecifický cieľ, ktorým je príprava študentov na CK MO-A a aj na Medzinárodnú matematickú olympiádu. Každý môže, samozrejme v rámci svojich možností, riešiť aj viac kategórií. Podrobnejšie informácie o jednotlivých kategóriách nájdete v pravidlách. Ak máte akékoľvek otázky alebo pripomienky, smelo nás kontaktujte e-mailom na adrese `kms@kms.sk`, prípadne ich pošlite písomne na adresu uvedenú pod zadaniami.

Veľa úspechov a radosti z riešenia vám želajú

vaši organizátori

Pravidlá KMS

Spoločné pre kategórie ALFA a BETA

Súťaž sa skladá z dvoch nezávislých častí – zimnej a letnej. Každá z nich prebieha v rámci školského polroka. Na konci každej časti budú najúspešnejší riešitelia pozvaní na záverečné sústredenie. Jedna časť pozostáva z troch sérií úloh. Zadania prvých dvoch sérií máte pred sebou a zadania tretej pošleme tým, ktorí nám pošlú prihlášku. Úlohy budú obodované počtom bodov od 0 po 9. Body sa pritom udeľujú aj za čiastkové či neúplné riešenia. Za každú sériu sa riešiteľovi do poradia započíta 5 úloh s najväčším bodovým ziskom.

Kategória ALFA
Pozor, v pravidlách tejto kategórie sú zmeny.

Kategóriu ALFA môžu riešiť len študenti stredných škôl, ktorí sa nezúčastnili celoštátneho kola matematickej olympiády a ktorých koeficient k_α je najviac 3.

Tento koeficient si môžeš vypočítať ako $k_\alpha = r + u$, kde číslo r je tvoj ročník a číslo u je počet tvojich úspešných semestrov (polrokov) pred začiatkom tohoto semestra. Semester považuj za úspešný, ak sa ti počas neho podarilo získať pozvánku na sústredenie KMS, alebo si sa ho zúčastnil ako náhradník.

Úlohu číslo 1 môžu súťažne riešiť len študenti s $k_\alpha \leq 1$ a úlohu číslo 2 len študenti s $k_\alpha \leq 2$. Ostatné úlohy $(3 - 7)$ môžu riešiť všetci riešitelia kategórie ALFA.

V tejto kategórii sa bude zostavovať päť regionálnych výsledkových listín a to pre regióny východné Slovensko, stredné Slovensko, západné Slovensko, Bratislava a zahraničie. Na záverečné sústredenie bude zvyčajne pozvaných 5 najúspešnejších riešiteľov z každého regiónu Slovenska, ďalších aspoň 5 podľa celkového bodového zisku a najúspešnejší riešitelia Matematickej olympiády. Ďalší riešitelia v poradí budú na sústredenie pozvaní ako náhradníci. Víťazi slovenských regiónov budú odmenení hodnotnými vecnými cenami. Žiaci základných škôl nebudú na sústredenie pozvaní.

Kategória BETA

Kategóriu BETA môžu riešiť všetci (aj zahraniční) študenti stredných škôl. Riešitelia ALFY sa vo výsledkovej listine BETY objavia až po sérii, v ktorej pošlú aspoň jednu z úloh 8, 9, 10 alebo 11.

Svoj koeficient k_β si vyrátaš nasledovne: $k_\beta = o + u_\beta$, kde číslo o je súčet počtu tvojich účastí na celoštátnom kole matematickej olympiády a počtu tvojich umiestnení medzi uspešnými riešiteľmi tohoto kola. Číslo u_β je počet tvojich úspešných semestrov (polrokov) v kategórii BETA, teda tých, za ktoré si bol pozvaný na sústredenie KMS kategórie BETA, alebo si sa ho zúčastnil ako náhradník.

Úlohu číslo 5 môžu súťažne riešiť len študenti s $k_\beta = 0$ a úlohu číslo 6 len študenti s $k_\beta \leq 2$. Ostatné úlohy $(7 - 11)$ môžu riešiť všetci riešitelia.

V tejto kategórii sa bude zostavovať jedna spoločná výsledková listina. Na záverečné sústredenie bude pozvaných aspoň 30 najúspešnejších riešiteľov (z toho najviac 10 zahraničných), ďalší v poradí budú pozvaní ako náhradníci. Prví piati budú odmenení hodnotnými vecnými cenami.

Kategória GAMA

Súťaž prebieha celoročne a pozostáva zo šiestich sérií úloh. Zadania prvej a druhej série sú v tomto letáku, ďalšie pošleme tým, ktorí nám pošlú prihlášku. Úlohy 10 a 11 budú obodované počtom bodov od 0 po 9. Za správne riešenie ostatných úloh sa dá získať maximálne 7 bodov. Len v prípade, ak sa niekomu podarí dokázať všeobecnejšie tvrdenie ako v zadaní niektorej z týchto úloh, môže za danú úlohu dostať aj 8 alebo 9 bodov.

Do výsledkovej listiny sa počítajú všetky úlohy. Najúspešnejší riešitelia kategórie GAMA za celý rok budú odmenení hodnotnou knihou podľa vlastného výberu.

Spoločné pre všetky kategórie

- Príklady rieš samostatne. Riešenie každej úlohy riadne zdôvodni. V prípade, že v časti či celom riešení používaš odbornú literatúru, uveď jej názov, autora, vydavateľstvo, rok vydania a stranu. Samozrejme, aj v tomto prípade zašli kompletné riešenie. Za riešenie využívajúce výpočtovú techniku spravidla nedostaneš veľa bodov.
- Riešenia posielaj do termínu odoslania série. Ak posielaš riešenia z územia mimo Slovenskej republiky, treba to stihnúť do uvedeného zahraničného termínu. Riešenia odoslané po termíne odoslania (rozhodujúca je pečiatka na obálke) spôsobujú značné organizačné problémy, vyhradzujeme si preto právo udeliť nula bodov za všetky riešenia odoslané po termíne.
- Za riešenie odoslané po termíne sa považuje aj akékoľvek riešenie odovzdané organizátorom osobne.
- V kategórii GAMA treba príklady 10 a 11 odoslať do termínu odoslania kategórie BETA. Ostatné príklady kategórie GAMA majú termín zvyčajne o pár dní neskôr.
- Riešenie každého príkladu píš na samostatný papier formátu A4. Ku každému príkladu uveď svoje meno, triedu, školu a adresu! Vítané sú aj riešenia v angličtine a češtine a riešenia písané v TeXu. Z organizačných dôvodov nebudú opravované riešenia písané v iných jazykoch.
- Opravené, obodované a okomentované riešenia spolu so vzorovými riešeniami a prípadnou ďalšou korešpondenciou Ti môžu byť zasielané domov, do školy alebo na inú adresu. Svoju voľbu vyznač v návratke. V prípade, ak chceš korešpondenciu posielať inde ako do školy, je potrebné zaslať nám s návratkou aj tri obálky (najlepšie formátu A5) s vypísanou adresou (známky nie sú potrebné).
- Nedodržanie týchto pravidiel bude viesť k postihu.
- Pokiaľ máš dojem, že tvoje riešenie bolo nesprávne obodované, pošli čo najskôr písomnú sťažnosť. Nezabudni k nej priložiť aj originál sporného riešenia.
- Ak ti nie je v zadaniach čokoľvek jasné, alebo máš akékoľvek pochybnosti, netreba sa báť spýtať sa nás. Ideálny spôsob je zaslanie e-mailu na `kms@kms.sk`, prípadne listu na známu adresu KMS, OATČ KAGDM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava.

Elektronické posielanie riešení

Presný návod na ich odovzdávanie nájdeš po prihlásení na stránke `kms.sk/eriesenia`. Pre elektronické posielanie riešení platia nasledovné pravidlá.

- Termín na odovzdanie je vždy v deň termínu odoslania série o **17:00**. Po tomto čase už elektronické posielanie nie je možné. Tento jednotný termín sa týka aj zahraničných riešiteľov. Termín na odovzdanie kategórie GAMA je v deň termínu odoslania tejto kategórie v rovnaký čas.
- Akceptované sú iba riešenia vo formáte pdf. Pri ich tvorbe je ideálne použiť TeX, prípadne export do formátu pdf z iných aplikácií.
- Na stránke `kms.sk/eriesenia` je možné (po prihlásení) vyplniť **elektronickú prihlášku**. Nebudeš ju tak musieť zasielať písomne. Je však potrebné (v prípade posielania korešpondencie inde ako do školy) zaslať nám obálky ako doteraz. Opravené príklady sa Ti totiž budú späť posielať klasickým spôsobom.

Náboj KMS

Aj v tomto semestri sa môžete tešiť na tradičnú matematickú súťaž – Náboj KMS, ktorý je naplánovaný na piatok 8. apríla 2011. Podrobnejšie informácie nájdete onedlho na stránke `kms.sk/naboj` a budú tiež zaslané na vašu školu.

Prednášky

Riešiteľom z celého Slovenska odporúčame navštíviť Klub Trojstenu, ktorý sa uskutoční v Bratislave dňa 9. apríla 2011 (po Náboji KMS). Bližšie informácie nájdete v pozvánke, ktorú čoskoro zašleme vám alebo na vašu školu, a tiež na internetovej stránke `www.fks.sk/klub`.

Riešiteľom z okolia Žiliny odporúčame navštíviť Matematický klub (MaK), ktorý má skoro každú poslednú sobotu v mesiaci stretnutie v budove Fakulty riadenia a informatiky ŽU na Veľkom Dieli v Žiline v čase 9^{00} – 14^{00}. Okrem dvoch zaujímavých prednášok si máte možnosť s kamarátmi aj zašportovať. Najbližší MaK sa koná 26. marca 2011, na ďalšie sa môžete tešiť v mesiacoch apríl a máj. Bližšie informácie nájdete na stránke `www.sezam.sk`.

.... TU ODSTRIHNI !!! ....

Prihláška do letnej časti KMS 2010/2011 – **poslať spolu s 1. sériou alebo vyplniť na** `kms.sk/eriesenia`**!**

Meno a priezvisko: .... Dátum narodenia: ....
Škola: ....
Trieda ....
Počet účastí na celoštátnom kole MO: ...., z ktorých bolo ....úspešných
Adresa domov: ....
Adresa pre poštu (domov – internát – škola): ....
Tel. domov: .... mobil (vlastný): .... e-mail: ....

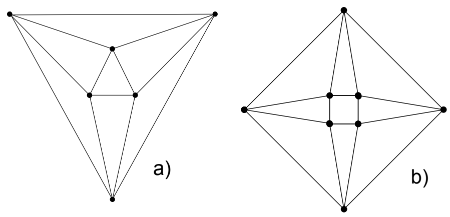
Pozor! Podmienkou posielania korešpondencie domov je zaslanie 3 obálok A5 s adresami!

Zadania 1. série letnej časti KMS 2010/2011

Kategória ALFA

Úloha č. 1:
Nájdite všetky kladné celočíselné násobky čísla 6, ktoré majú práve 6 kladných deliteľov (vrátane čísla 1 a samotného čísla). Nezabudnite dokázať, že ste ich našli naozaj všetky.

Úloha č. 2:
Plán mesta Kocúrkovo je znázornený na obrázku a). Mesto má 6 križovatiek a 12 ciest. Starosta mesta nariadil zjednodušiť premávku tým, že sa z každej cesty stane jednosmerná. Zároveň má požiadavku, aby sa z ľubovoľnej križovatky dalo dostať do ľubovoľnej inej použitím najviac dvoch ciest. Je takéto nariadenie možné v Kocúrkove uskutočniť? Je takéto nariadenie možné uskutočniť v dedine Mačkovce, ktorej plán je na obrázku b)? Mačkovce majú 8 križovatiek a 16 ciest medzi nimi.



Úloha č. 3:
Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n sa v desiatkovom zápise aspoň jedného z čísel n a $3n$ vyskytuje cifra 1, 2 alebo 9.

Úloha č. 4:
Prvých 6 členov postupnosti sú čísla $0, 1, 2, 3, 4, 5$ v tomto poradí. Každý ďalší člen postupnosti je posledná cifra súčtu predchádzajúcich šiestich členov (siedmy člen postupnosti je teda 5, ôsmy člen je 0, a tak ďalej). Môže sa v tejto postupnosti vyskytovať päť po sebe idúcich čísel $1, 3, 5, 7, 9$?

Úloha č. 5:
Číselným trojuholníkom nazveme útvar zložený z prirodzených čísel, ktorý má tvar trojuholníka. V prvom riadku číselného trojuholníka je n čísel, kde n je prirodzené číslo. Toto číslo n je zároveň dĺžkou strany číselného trojuholníka. Číselný trojuhoník so stranou n má n riadkov, pričom v i-tom riadku je $n - i + 1$ čísel. Čísla v dvoch po sebe idúcich riadkoch i a $i + 1$ sú umiestnené tak, že pod každou dvojicou čísel v i-tom riadku je číslo v $(i + 1)$-vom riadku. Číselný trojuholník voláme *podivný*, ak platí:

- čísla, ktoré ho tvoria, sú navzájom rôzne prirodzené čísla,
- pod každou dvojicou susedných čísel v riadku i je číslo v riadku $i + 1$, ktoré je podielom väčšieho a menšieho čísla z danej dvojice. Toto platí pre všetky $1 \leq i < n$, kde n je dĺžka strany číselného trojuholníka.

Napríklad číselný trojuholník na nasledujúcom obrázku je podivný.

21 84 7
4 12
3

Najväčšie číslo v podivnom číselnom trojuholníku nazveme *úžasné*. Nájdite číselný trojuholník s dĺžkou strany 4, ktorého úžasné číslo je čo najmenšie. Dokážte, že neexistuje číselný trojuholník s dĺžkou strany 4 a s menším úžasným číslom, ako ste našli.

Úloha č. 6:
Pre reálne čísla a, b, c platí $(a + b + c)c < 0$. Dokážte, že potom má rovnica $ax^2 + bx + c = 0$ dve rôzne reálne riešenia.
Pomôcka: stačí dokázať, že $b^2 > 4ac$.

Úloha č. 7:
Mišáč má dva nové balíčky kariet. V prvom balíčku je 2011 bielych kariet a v druhom 2011 červených kariet (okrem uvedených už žiadne ďalšie karty Mišáč nemá). Mišáč si vymyslel hru a pozval k sebe 2011 ľudí, aby si ju zahrali. Najprv hráčov posadil do kruhu za svoj stôl. Potom rozdal každému hráčovi práve dve karty a začal vysvetľovať pravidlá. Hra sa delí na kolá. V každom kole všetci hráči naraz posunú doľava jednu kartu podľa pravidla: ak hráč má na ruke aspoň jednu červenú kartu, tak posunie doľava jednu červenú kartu, inak posunie doľava bielu kartu. Hra končí, ak má každý na ruke jednu bielu a jednu červenú kartu.
Mišáča zaujíma, ako má rozdať karty, aby mala hra čo najviac kôl. Uveďte spôsob, ako takto rozdať karty a tiež počet kôl najdlhšej možnej hry. (Treba tiež samozrejme dokázať, že dlhšie hra trvať nemôže.)

Kategória BETA
Úlohy číslo **5, 6, 7** sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

Úloha č. 8:
Edo rád píše prirodzené čísla n (v desiatkovej sústave) odzadu a označuje ich ako čísla $E(n)$. Jefo na rozdiel od Eda rád počíta ich ciferný súčet $J(n)$. Spolu prišli na to, že ak $J(n^2) = J(n)^2$, potom $E(n^2) = E(n)^2$. Rozhodnite, či majú pravdu.
Napríklad: $E(123) = 321$, $E(1200) = 21$ a $J(124) = J(214) = 7$.

Úloha č. 9:
Petržlen dostal na Vianoce novú šachovnicu $n \times n$ a jedného šachového jazdca. Na každé políčko šachovnice napísal číslo 0. Potom si vybral dve políčka, medzi ktorými vie skočiť jazdec, a na obe políčka napísal číslo o jedna väčšie (pričom pôvodné čísla vymazal). Toto niekoľkokrát zopakoval. Keď skončil, na šachovnici bolo napísané každé z čísel $1, 2, \ldots, n^2$ práve raz. Pre aké n sa to mohlo Petržlenovi podariť?

Úloha č. 10:
Stanka si cestou do školy rada umocňuje rôzne prvočísla. Všimla si, že číslo p^t malo niekde v desiatkovom zápise aspoň k núl za sebou. Existuje pre každé prvočíslo p a prirodzené číslo k takéto prirodzené číslo t?

Úloha č. 11:
Daná je postupnosť nezáporných celých čísel $a_1, a_2, \ldots, a_{2011}$. Pre každé prirodzené i, j také, že $i + j \leq 2011$, platí

$$a_i + a_j \leq a_{i+j} \leq a_i + a_j + 1.$$

Dokážte, že existuje nekonečne veľa reálnych čísel x, pre ktoré platí $a_n = \lfloor nx \rfloor$ pre všetky $n = 1, 2, \ldots, 2011$.
Poznámka: $\lfloor y \rfloor$ označuje dolnú celú časť z y, teda najväčšie celé číslo menšie alebo rovné ako y.

Kategória GAMA
Úlohy číslo **10** a **11** sú rovnaké ako v kategórii **BETA** a platí pre ne termín odoslania kategórie **BETA**.
Najúspešnejší riešitelia kategórie GAMA za celý rok budú odmenení hodnotnou knihou podľa vlastného výberu.

Úloha č. 12:
Označme K, L, M, N štyri body v trojrozmernom priestore. Dokážte, že platí

$$|KL|^2 + |MN|^2 \leq |KM|^2 + |LN|^2 + |KN|^2 + |LM|^2.$$

Úloha č. 13:
Nájdite všetky prirodzené čísla n, pre ktoré sa trojuholník dá rozrezať na n menších trojuholníkov tak, že žiadne tri zo vzniknutých vrcholov neležia na jednej priamke a zároveň každý vrchol patrí rovnakému počtu malých trojuholníkov.

Úloha č. 14:
Kružnice k_1 a k_2 so stredmi S_1 a S_2 sa navzájom dotýkajú zvonka v bode D. Kružnice k_1, k_2 sa navyše zvnútra dotýkajú kružnice k postupne v bodoch E_1, E_2. Priamka t je spoločná dotyčnica kružníc k_1, k_2 v bode D. Nech AB je priemer k kolmý na t taký, že body A, S_1, E_1 ležia v tej istej polrovine vyťatej priamkou t. Dokážte, že priamky AS_1, BS_2, E_1E_2 a t sa pretínajú v jednom bode.

Odporúčaná literatúra

Nielen začínajúcim riešiteľom odporúčame preštudovať si nasledujúce knihy o riešení matematických problémov:
Hecht, T. – Sklenáriková, Z.: Metódy riešenia matematických úloh
Larson, L. C.: Metódy riešenia matematických problémov. ALFA, Bratislava, 1990.
Zoznam ďalšej odporúčanej literatúry (aj pre pokročilých riešiteľov), či informácie o jej zapožičaní z našej knižnice nájdete na internete na adrese `kms.sk/kniznica`.

Kategória **ALFA**, **BETA**: Termín odoslania riešení je **28. február 2011** (pre zahraničie 25. február 2011).

Kategória **GAMA**: Termín odoslania riešení je **4. marec 2011**.

Naša adresa: KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava. `kms.sk`
Projekt č. LPP-0103-09 je riešený s finančnou podporou Agentúry na podporu výskumu a vývoja.

Zadania 2. série letnej časti KMS 2010/2011

Kategória ALFA

Úloha č. 1:
Mojo si kreslil konvexné štvoruholníky. Pri ich kreslení si všimol zaujímavú vec. V každom štvoruholníku, čo nakreslil, bol obvod štvoruholníka väčší ako súčet dĺžok jeho uhlopriečok. Platí to v každom štvoruholníku? Nezabudnite svoje tvrdenie poriadne zdôvodniť.

Úloha č. 2:
Zostrojme vnútri strán AB, BC, CD, DA štvorca $ABCD$ postupne body A', B', C', D' také, že

$$|AA'| = |BB'| = |CC'| = |DD'|.$$

Nech P je ľubovoľný bod vnútri štvorca $ABCD$. Označme obsahy štvoruholníkov $AA'PD'$, $BB'PA'$, $CC'PB'$ a $DD'PC'$ postupne S_1, S_2, S_3, S_4. Dokážte, že platí $S_1 + S_3 = S_2 + S_4$.

Úloha č. 3:
Ťažnice z vrcholov A a B trojuholníka ABC sú na seba kolmé. Dokážte, že AB je najkratšou stranou tohto trojuholníka.

Úloha č. 4:
V obdĺžniku $ABCD$ platí $|AB| > |BC|$. Narysujme kružnicu, ktorá má stred na úsečke AB a prechádza bodmi A a C. Táto kružnica pretne stranu CD v bode M. Dokážte, že priamky AM a BD sú navzájom kolmé.

Úloha č. 5:
Nech $P_1, P_2, \ldots, P_{2011}$ sú rôzne body v rovine. Spojme body postupne úsečkami

$$P_1P_2, P_2P_3, \ldots, P_{2010}P_{2011}, P_{2011}P_1.$$

Zostrojte priamku, ktorá prechádza vnútorným bodom každej z týchto úsečiek. Koľko riešení má úloha v závislosti od vzájomnej polohy bodov $P_1, P_2, \ldots, P_{2011}$?

Úloha č. 6:
Stredy strán BC, CA, AB trojuholníka ABC označíme postupne K, L, M. Dokážte, že uhly AMC a BLC majú rovnakú veľkosť *práve vtedy*, keď majú rovnakú veľkosť uhly CAK a BCM.

Úloha č. 7:
Majme na kružnici k so stredom O vyznačené dva polomery OA a OB. Kružnica l sa dotýka kružnice k v bode Q a dotýka sa aj spomínaných polomerov postupne v bodoch C a D. Určte veľkosť uhla AQC.

Kategória BETA

Úlohy číslo **5, 6, 7** sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

Úloha č. 8:
Dotyčnice v bodoch A a B ku kružnici opísanej trojuholníku ABC sa pretínajú v bode T. Rovnobežka s priamkou AC prechádzajúca bodom T pretína priamku BC v bode D. Dokážte, že trojuholník ACD je rovnoramenný.

Úloha č. 9:
Majme trojuholník ABC. Označme M stred strany AB. Nech D je bod na opačnej polpriamke k polpriamke CA, pre ktorý platí $|CB| = |CD|$. Priesečník osi uhla ACB a priamky MD označme K. Ukážte, že uhly KBC a BAC majú rovnakú veľkosť.

Úloha č. 10:
Daná je kružnica k a bod A ležiaci mimo nej. Pre rovnostranný trojuholník PQR vpísaný do kružnice k označíme U, V, W postupne priesečníky priamok AP, AQ, AR s kružnicou k rôzne od P, Q, R. Dokážte, že hodnota výrazu

$$\frac{AP}{AU} + \frac{AQ}{AV} + \frac{AR}{AW}$$

nezávisí od polohy trojuholníka PQR.

Úloha č. 11:
Máme daný trojuholník ABC. Označme k vpísanú kružnicu trojuholníka ABC a I jej stred. Nech p je priamka dotýkajúca sa kružnice k v bode L tak, že p nie je rovnobežná so žiadnou stranou trojuholníka ABC. Nech A' je bod na p, pre ktorý je uhol AIA' pravý. Podobne určíme body B' a C'. Dokážte, že priamky AA', BB' a CC' sa pretínajú v spoločnom bode.

Kategória GAMA
Úlohy číslo **10** a **11** sú rovnaké ako v kategórii **BETA** a platí pre ne termín odoslania kategórie **BETA**.
Najúspešnejší riešitelia kategórie GAMA za celý rok budú odmenení hodnotnou knihou podľa vlastného výberu.

Úloha č. 12:
Nech a, b, c sú kladné reálne čísla spĺňajúce $a + b + c = abc$. Dokážte, že

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \leq \frac{3}{2}$$

a zistite, kedy nastáva rovnosť.

Úloha č. 13:
Nech $n > 2$ je prirodzené číslo a A_n počet neprázdnych množín $S \subseteq \{1, 2, \cdots, n\}$ takých, že aritmetický priemer prvkov množiny S je celé číslo. Dokážte, že $A_n - n$ je vždy párne číslo.

Úloha č. 14:
Funkcia f je definovaná na prirodzených číslach predpisom

$$f(n) = \frac{1}{n}\left(\left\lfloor\frac{n}{1}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor + \cdots + \left\lfloor\frac{n}{n}\right\rfloor\right).$$

a) Dokážte, že $f(n+1) > f(n)$ platí pre nekonečne veľa hodnôt n.
b) Dokážte, že $f(n+1) < f(n)$ platí pre nekonečne veľa hodnôt n.

Odporúčaná literatúra

Nielen začínajúcim riešiteľom odporúčame preštudovať si nasledujúce knihy o riešení matematických problémov:
Hecht, T. – Sklenáriková, Z.: Metódy riešenia matematických úloh
Larson, L. C.: Metódy riešenia matematických problémov. ALFA, Bratislava, 1990.
Zoznam ďalšej odporúčanej literatúry (aj pre pokročilých riešiteľov), či informácie o jej zapožičaní z našej knižnice nájdete na internete na adrese `kms.sk/kniznica`.

Špeciálne k tejto sérii vám odporúčame prečítať si aj text o počítaní uhlov, ktorý nájdete na adrese
`http://kms.sk/~mazo/matematika/pocitanieUhlov.pdf`.

Fórum o príkladoch

Pre nedočkavcov funguje na stránke KMS diskusné fórum o príkladoch z KMS. Nájdete ho na adrese `kms.sk/forum` a môžete na ňom hneď po termíne danej série začať diskutovať o vašom najobľúbenejšom alebo najmenej obľúbenom príklade, prípadne zverejniť svoje riešenie pre ostatných riešiteľov.

Kategória **ALFA**, **BETA**: Termín odoslania riešení je **4. apríl 2011** (pre zahraničie 1. apríl 2011).
Kategória **GAMA**: Termín odoslania riešení je **8. apríl 2011**.

Naša adresa: KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava. `kms.sk`
Projekt č. LPP-0103-09 je riešený s finančnou podporou Agentúry na podporu výskumu a vývoja.