Korešpondenčný matematický seminár

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Univerzita Komenského

Slovenská komisia Matematickej olympiády

Jednota slovenských matematikov a fyzikov

Milí študenti, učitelia a ostatní matematickí nadšenci!

Dostávate do rúk úvodný leták letnej časti 31. ročníka Korešpondenčného Matematického Seminára (KMS). Táto súťaž organizovaná občianskym združením Trojsten na pôde Fakulty matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave (FMFI UK) je pre stredoškolákov jedinečnou príležitosťou na zdokonalenie svojich matematických schopností a logického myslenia. Zručnosti a skúsenosti získané pri riešení tohto seminára, prípadne pri účasti na záverečnom sústredení, sú veľmi cennou devízou aj pri riešení Matematickej olympiády (MO). Mladším a začínajúcim študentom je určená kategória ALFA, pre starších a skúsenejších je kategória BETA a pre tých, čo majú vyššie ambície a chceli by uspieť na celoštátnom kole MO-A je určená kategória GAMA. Táto kategória má veľmi špecifický cieľ, ktorým je príprava študentov na CK MO-A a aj na Medzinárodnú matematickú olympiádu. Každý môže, samozrejme v rámci svojich možností, riešiť aj viac kategórií. Podrobnejšie informácie o jednotlivých kategóriách nájdete v pravidlách. Ak máte nejaké otázky alebo pripomienky, smelo nás kontaktujte e-mailom na adrese `kms@kms.sk`, prípadne ich pošlite písomne na adresu uvedenú pod zadaniami.

Veľa úspechov a radosti z riešenia vám želajú

vaši organizátori

Pravidlá KMS

Spoločné pre kategórie ALFA a BETA

Súťaž sa skladá z dvoch nezávislých častí – zimnej a letnej. Každá z nich prebieha v rámci školského polroka. Na konci každej časti budú najúspešnejší riešitelia pozvaní na záverečné sústredenie. Jedna časť pozostáva z troch sérií úloh. Zadania prvých dvoch sérií máte pred sebou a zadania tretej pošleme tým, ktorí nám pošlú prihlášku. Úlohy budú obodované počtom bodov od 0 po 9. Body sa pritom udeľujú aj za čiastkové či neúplné riešenia. Za každú sériu sa riešiteľovi do poradia započíta 5 úloh s najväčším bodovým ziskom.

Kategória ALFA

Kategóriu ALFA môžu riešiť len študenti stredných škôl, ktorí sa nezúčastnili celoštátneho kola matematickej olympiády a ktorých koeficient k_α je najviac 3.

Tento koeficient si môžeš vypočítať ako $k_\alpha = r+u+m$, kde číslo r je tvoj ročník a číslo u je počet tvojich úspešných semestrov (polrokov) pred začiatkom tohoto semestra. Semester považuj za úspešný, ak sa ti počas neho podarilo získať pozvánku na sústredenie KMS, alebo si sa ho zúčastnil ako náhradník. Nakoniec m je 1 v prípade, že si žiakom matematickej triedy a 0 v opačnom prípade.

Úlohu číslo 1 môžu súťažne riešiť len študenti s $k_\alpha \leq 1$ a úlohu číslo 2 len študenti s $k_\alpha \leq 2$. Ostatné úlohy $(3-7)$ môžu riešiť všetci riešitelia kategórie ALFA.

V tejto kategórii sa bude zostavovať päť regionálnych výsledkových listín a to pre regióny východné Slovensko, stredné Slovensko, západné Slovensko, Bratislava a zahraničie. Na záverečné sústredenie bude zvyčajne pozvaných 5 najúspešnejších riešiteľov z každého regiónu Slovenska, ďalších aspoň 5 podľa celkového bodového zisku a najúspešnejší riešitelia Matematickej olympiády. Ďalší riešitelia v poradí budú na sústredenie pozvaní ako náhradníci. Víťazi slovenských regiónov budú odmenení hodnotnými vecnými cenami. Žiaci základných škôl nebudú na sústredenie pozvaní.

Kategória BETA

Kategóriu BETA môžu riešiť všetci (aj zahraniční) študenti stredných škôl. Riešitelia ALFY sa vo výsledkovej listine BETY objavia až po sérii, v ktorej pošlú aspoň jednu z úloh 8, 9, 10 alebo 11.

Svoj koeficient k_β si vyrátaš nasledovne: $k_\beta = o + u_\beta$, kde číslo o je súčet počtu tvojich účastí na celoštátnom kole matematickej olympiády a počtu tvojich umiestnení medzi uspešnými riešiteľmi tohoto kola. Číslo u_β je počet tvojich úspešných semestrov (polrokov) v kategórii BETA, teda tých, za ktoré si bol pozvaný na sústredenie KMS kategórie BETA, alebo si sa ho zúčastnil ako náhradník.

Úlohu číslo 5 môžu súťažne riešiť len študenti s $k_\beta = 0$ a úlohu číslo 6 len študenti s $k_\beta \leq 2$. Ostatné úlohy $(7 - 11)$ môžu riešiť všetci riešitelia.

V tejto kategórii sa bude zostavovať jedna spoločná výsledková listina. Na záverečné sústredenie bude pozvaných aspoň 30 najúspešnejších riešiteľov (z toho najviac 10 zahraničných), ďalší v poradí budú pozvaní ako náhradníci. Prví piati budú odmenení hodnotnými vecnými cenami.

Kategória GAMA

Súťaž prebieha celoročne a pozostáva zo šiestich sérií úloh. Zadania prvej a druhej série sú v tomto letáku, ďalšie pošleme tým, ktorí nám pošlú prihlášku. Úlohy 10 a 11 budú obodované počtom bodov od 0 po 9. Za správne riešenie ostatných úloh sa dá získať maximálne 7 bodov. Len v prípade, ak sa niekomu podarí dokázať všeobecnejšie tvrdenie ako v zadaní niektorej z týchto úloh, môže za danú úlohu dostať aj 8 alebo 9 bodov.

Do výsledkovej listiny sa počítajú všetky úlohy. Najúspešnejší riešitelia kategórie GAMA za celý rok budú odmenení hodnotnou knihou podľa vlastného výberu.

Spoločné pre všetky kategórie

- Príklady rieš samostatne. Riešenie každej úlohy riadne zdôvodni. V prípade, že v časti či celom riešení používaš odbornú literatúru, uveď jej názov, autora, vydavateľstvo, rok vydania a stranu. Samozrejme, aj v tomto prípade zašli kompletné riešenie. Za riešenie využívajúce výpočtovú techniku spravidla nedostaneš veľa bodov.
- Riešenia posielaj do termínu odoslania série. Ak posielaš riešenia z územia mimo Slovenskej Republiky, treba to stihnúť do uvedeného zahraničného termínu. Riešenia odoslané po termíne odoslania (rozhodujúca je pečiatka na obálke) spôsobujú značné organizačné problémy, vyhradzujeme si preto právo udeliť nula bodov za všetky riešenia odoslané po termíne.
- Za riešenie odoslané po termíne sa považuje aj akékoľvek riešenie odovzdané organizátorom osobne.
- V kategórii GAMA treba príklady 10 a 11 odoslať do termínu odoslania kategórie BETA. Ostatné príklady kategórie GAMA majú termín zvyčajne o pár dní neskôr.
- Riešenie každého príkladu píš na samostatný papier formátu A4. Ku každému príkladu uveď svoje meno, triedu, školu a adresu! Vítané sú aj riešenia v angličtine a češtine a riešenia písané v TEXu. Z organizačných dôvodov nebudú opravované riešenia písané v iných jazykoch.
- Nedodržanie týchto pravidiel bude viesť k postihu.
- Pokiaľ máš dojem, že tvoje riešenie bolo nesprávne obodované, pošli čo najskôr písomnú sťažnosť. Nezabudni k nej priložiť aj originál sporného riešenia.
- Ak ti nie je v zadaniach čokoľvek jasné, alebo máš akékoľvek pochybnosti, netreba sa báť spýtať sa nás. Ideálny spôsob je zaslanie e-mailu na `kms@kms.sk`, prípadne listu na známu adresu KMS, OATČ KAGDM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava.

Počnúc minulým semestrom je možné **elektronické posielanie** riešení. Presný návod na ich odovzdávanie nájdeš po príhlásení na stránke `kms.sk/eriesenia`. Pre elektronické posielanie riešení platia nasledujúce pravidlá.

- Termín na odovzdanie je vždy v deň termínu odoslania série o 12:00 (poludnie). Tento jednotný termín sa týka aj zahraničných riešiteľov. Termín na odovzdanie kategórie GAMA je v deň termínu odoslania tejto kategórie v rovnaký čas. Po tomto čase už elektronické posielanie nie je možné.
- Akceptované sú iba riešenia vo formáte pdf. Pri ich tvorbe je ideálne použiť TEX, prípadne export do formátu pdf z iných aplikácií.
- Od tohto semestra bude možné na stránke `kms.sk/eriesenia` (po prihlásení) vyplniť **elektronickú prihlášku**. Nebudeš ju tak musieť zasielať písomne. Avšak v prípade posielania korešpondencie domov je potrebné zaslať nám obálky ako doteraz (pozri ďalej). Opravené príklady sa totiž budú späť posielať klasickým spôsobom.

Náboj KMS

Aj v tomto semestri sa môžete tešiť na tradičnú matematickú súťaž – Náboj KMS, ktorý je naplánovaný na piatok 12. marca 2010. Podrobnejšie informácie nájdete čoskoro na stránke `kms.sk/naboj` a budú tiež zaslané na vašu školu.

Prednášky

Riešiteľom z celého Slovenska odporúčame navštíviť Klub Trojstenu, ktorý sa uskutoční v Bratislave dňa 13. marca 2010 (po Náboji KMS). Bližšie informácie nájdete v pozvánke, ktorá príde aj na vašu školu, a na internetovej stránke `www.fks.sk/klub`.

Riešiteľom z okolia Žiliny odporúčame navštíviť Matematický klub (MaK), ktorý má skoro každú poslednú sobotu v mesiaci stretnutie v budove A Žilinskej univerzity (ružová budova na Hurbanovej ulici oproti hlavnej pošte) v čase 9^{00} – 14^{00}. Okrem dvoch zaujímavých prednášok si máte možnosť s kamarátmi aj zašportovať. Najbližší MaK sa koná 27. marca 2010, na ďalšie sa môžete tešiť v mesiacoch apríl a máj. Bližšie informácie nájdete na stránke `www.sezam.sk`.

.... TU ODSTRIHNI !!! ....

Prihláška do letnej časti KMS 2009/2010 – **poslať spolu s 1. sériou alebo vyplniť na** `kms.sk/eriesenia`**!**

Meno a priezvisko: .... Dátum narodenia: ....
Škola: ....
Trieda .... so zameraním na matematiku: áno—nie
Počet účastí na celoštátnom kole MO: .... , z ktorých bolo .... úspešných.
Adresa domov: ....
Adresa pre poštu (domov – internát – škola): ....
Tel. domov: .... mobil (vlastný): .... e-mail: ....

Pozor! Podmienkou posielania korešpondencie domov je zaslanie 4 obálok A5 s adresami!

Zadania 1. série letnej časti KMS 2009/2010

Kategória ALFA

Úloha č. 1:
Katka, Škrečok a Filip majú radi čokoládu. Mamke vzali a zjedli päť čokolád, čo mala na varenie. Keď mamka zisťovala, kto jej ich zjedol, deti povedali:

Katka: „Nezjedla som žiadnu čokoládu.“
Škrečok: „Ani ja som nezjedol žiadnu čokoládu.“
Filip: „Ja som tiež nezjedol žiadnu čokoládu.“
Katka: „Škrečok zjedol viac než Filip.“
Škrečok: „Katka v predchádzajúcej vete klame!“
Filip: „Katka so Škrečkom zjedli všetko.“
Katka: „Filip v predchádzajúcej vete klame!“

Keď sa deti napokon priznali, zistilo sa (o tých siedmich tvrdeniach), že každý klamal toľkokrát, koľko čokolád zjedol. Koľko čokolád zjedol každý z nich?

Úloha č. 2:
Dokážte, že aspoň jedno zo štyroch prirodzených čísel $p, q, p + q, p - q$ je deliteľné tromi.

Úloha č. 3:
Ika má 4 pravé a 4 falošné diamanty, ktoré nevie rozlíšiť. Našťastie má špeciálny prístroj, ktorým môže robiť nasledovné meranie. Vloží doň ľubovoľný počet diamantov a prístroj jej povie, koľko z vložených diamantov je pravých. Ika by chcela (nevedno prečo) dva diamanty, z ktorých je jeden pravý a druhý falošný. Poraďte jej, ako ich môže nájsť na dve merania prístrojom. Koľko diamantov treba vložiť do prístroja pri prvom meraní?

Úloha č. 4:
Na výlete daroval každý chlapec každému dievčaťu jeden keksík a každé dievča darovalo každému chlapcovi jeden rezeň. Neskôr zjedol každý chlapec dva svoje rezne a každé dievča zjedlo tri svoje keksíky. Ukázalo sa, že deti spolu zjedli štvrtinu zo všetkých darčekov. Najviac koľko detí sa mohlo na výlete zúčastniť? Zdôvodnite tiež, prečo ich nemohlo byť viac.

Úloha č. 5:
Kika holduje hazardným hrám. Má dva rovnaké balíčky 32 sedmových kariet. Každý z nich samostatne zamieša a položí jeden balíček na druhý. Teraz pre každú z 32 dvojíc rovnakých kariet spočíta počet iných kariet medzi kartami z tejto dvojice v takto vytvorenej kope. Určte súčet týchto počtov. (Nájdite všetky možné hodnoty tohto súčtu a dokážte, že iné neexistujú.)

Úloha č. 6:
Nech a, b, c sú celé čísla, ktoré vyhovujú rovnosti $ab + bc + ca = 1$. Dokážte, že číslo

$$(1 + a^2)(1 + b^2)(1 + c^2)$$

je druhou mocninou celého čísla.

Úloha č. 7:
Petržlen bol u Ondreja na izbe a zbadal jeho prešibanú krysu. Nedalo sa nevšimnúť, že mala niečo za lubom (vlastne ako vždy). Ofarbovala prirodzené čísla rôznymi farbami[1] tak, aby platilo: Ak je rozdiel dvoch rôznych prirodzených čísel prvočíslo, tak tieto čísla majú rôznu farbu. S akým najmenším počtom rôznych farieb sa to mohlo kryse podariť? Vysvetlite tiež, prečo by jej menej farieb nestačilo.

Kategória BETA

Úlohy číslo **5, 6, 7** sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

Úloha č. 8:
Rozdeľovanie cukríkov do nádob je Edova obľúbená činnosť vo voľnom čase. Nerobí to však hocijako. Na začiatku si zoberie aspoň n nádob, pričom n je minimálne štyri. Potom do týchto nádob rozdelí niekoľko cukríkov, pričom spolu dá do nádob aspoň štyri cukríky. Následne v každom ťahu odoberie z dvoch rôznych nádob po jednom cukríku a obidva dá do nejakej tretej nádoby. Edo sa snaží dostať všetky cukríky do jednej nádoby po konečnom počte ťahov. Podarí sa mu to vždy, nech je začiatočné rozloženie cukríkov v nádobách akékoľvek?

[1] každé číslo práve jednou farbou

Úloha č. 9:
Jefo si myslí, že určite každého z vás nadchne nasledúca úloha. Chceme zapísať čísla 1, 2, ..., 100 za sebou v takom poradí, aby pre každé číslo platilo, že má pred sebou len také čísla, ktoré sú od neho väčšie, alebo len také čísla, ktoré sú od neho menšie. Koľkými spôsobmi to vieme urobiť?
Poznámka: Keby sme takto zapisovali za sebou iba čísla 1, 2, 3, 4, 5; tak vyhovujúce poradie je napríklad 4, 5, 3, 2, 1.

Úloha č. 10:
U Miša v chladničke sa dobre darí istej geometrickej postupnosti. Vieme o nej, že jej prvý, desiaty a tridsiaty člen je prirodzeným číslom. Dokážte, že aj jej dvadsiaty člen musí byť prirodzeným číslom.

Úloha č. 11:
Medzi vedúcimi KMS je istá skupina ľudí obľubujúcich konzumáciu Horaliek po šírke. Je známe, že týchto zaujímavých ľudí je aspoň päť. Niektorí ľudia v tejto skupine sa poznajú, iní zas nie. Vzťah poznania sa je vzájomný, teda ak Bus pozná Fofa, tak aj Fofo pozná Busa. Povedzme si niečo viac o tejto skupine. Vieme, že ak sa v nej dvaja ľudia poznajú, tak nemajú žiadnych spoločných známych. Ľubovoľní dvaja ľudia, ktorí sa nepoznajú, majú presne dvoch spoločných známych. Zistite, koľko najmenej ľudí môže byť v tejto skupine.

Kategória GAMA
Úlohy číslo **10** a **11** sú rovnaké ako v kategórii **BETA** a platí pre ne termín odoslania kategórie **BETA**.
Najúspešnejší riešitelia kategórie GAMA za celý rok budú odmenení hodnotnou knihou podľa vlastného výberu.

Úloha č. 12:
Prirodzené číslo nazvime *huňaté*, ak žiadne prvočíslo v jeho rozklade nemá exponent rovný jedna. Dokážte, že existuje nekonečne veľa dvojíc po sebe idúcich prirodzených čísel, ktoré sú obe huňaté. (Napríklad $(8, 9)$ je taká dvojica.)

Úloha č. 13:
V rovine je nakreslený konvexný mnohouholník P aj so všetkými jeho uhlopriečkami, ktoré ho delia na menšie konvexné mnohouholníky. Vieme, že dĺžky všetkých strán aj uhlopriečok mnohouholníka P sú racionálne čísla. Ukážte, že aj všetky strany menších konvexných mnohouholníkov majú racionálne dĺžky.

Úloha č. 14:
Nech $S = \{1, 2, \dots, 100\}$. Nájdite počet bijektívnych funkcií $f : S \to S$ takých, že pre všetky $n \in S$ platí

$$f(n) = f(g(n))f(h(n)),$$

kde $g(n), h(n)$ sú (jednoznačne určené) prirodzené čísla spĺňajúce $g(n) \leq h(n)$, $g(n)h(n) = n$ a $h(n) - g(n)$ je najmenšie možné.

Fórum o príkladoch

Pre nedočkavcov nedočkavých funguje na stránke KMS diskusné fórum o príkladoch z KMS. Nájdete ho na adrese `kms.sk/forum` a môžete na ňom hneď po termíne nasledujúcej série začať diskutovať o vašom najobľúbenejšom alebo najmenej obľúbenom príklade.

Odporúčaná literatúra

Všetkým záujemcom o samostatné štúdium dávame do pozornosti archív KMS s adresou `kms.sk/archiv`. Môžete tam nájsť zadania aj vzorové riešenia úloh, ktoré sa doteraz v KMS vyskytli. Pri riešení týchto úloh a čítaní vzorových riešení sa isto naučíte a dozviete mnoho zaujímavého. Ďalšie zaujímavé stránky sú tiež:

`www.cut-the-knot.org`

`www.cbel.com/math_recreations`

Kategória **ALFA**, **BETA**: Termín odoslania riešení je **22. februára 2010** (pre zahraničie 19. februára 2010).

Kategória **GAMA**: Termín odoslania riešení je **26. februára 2010**.

Naša adresa: KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava. `kms.sk`
Projekt č. LPP-0103-09 je riešený s finančnou podporou Agentúry na podporu výskumu a vývoja.

Zadania 2. série letnej časti KMS 2009/2010

Kategória ALFA

Úloha č. 1:
Do gule s objemom 1 m^3 vpíšeme kocku. Do tejto kocky zase vpíšeme guľu. Vypočítajte objem tejto menšej gule.

Úloha č. 2:
Nad odvesnami pravouhlého trojuholníka ABC s pravým uhlom pri vrchole C sú zvonku zostrojené štvorce $ACPQ$ a $BCRS$. Nech Q' a S' sú päty kolmíc z bodov Q a S na priamku AB. Dokážte, že $|S'B| = |AQ'|$.

Úloha č. 3:
Majme dve rovnobežné úsečky AB a CD, ktoré neležia na jednej priamke. K dispozícii máme iba ceruzku a pravítko bez rysky a bez mierky. Nájdite pomocou týchto dvoch nástrojov stred úsečky AB a stred úsečky CD, ak

a) $|AB| \neq |CD|$,

b) $|AB| = |CD|$.

Úloha č. 4:
V trojuholníku ABC sa os uhla pri vrchole A, os strany AB a výška z bodu B sa pretínajú v jednom bode. Dokážte, že aj os uhla pri vrchole A, os strany AC a výška z bodu C sa pretínajú v jednom bode.

Úloha č. 5:
Dané sú kružnice k_1 a k_2. Body O a P sú v tomto poradí stredy kružníc k_1 a k_2. Dotyčnice z bodu O ku kružnici k_2 pretínajú kružnicu k_1 v bodoch A a B tak, že body O a P sú v rôznych polrovinách určených priamkou AB. Podobne dotyčnice z bodu P ku kružnici k_1 pretínajú kružnicu k_2 v bodoch C a D tak, že body O a P ležia v rôznych polrovinách určených priamkou CD. Dokážte, že $|AB| = |CD|$.

Úloha č. 6:
Majme pravouhlý trojuholník, kde r je polomer vpísanej kružnice, R polomer opísanej, s je obvod a c je dĺžka prepony. Dokážte, že platí
$$\frac{s}{c} - \frac{r}{R} = 2$$
Takisto zistite, pre ktoré pravouhlé trojuholníky nadobúda pomer r/R najväčšiu hodnotu a určte túto hodnotu.

Úloha č. 7:
Daný je trojuholník, ktorý nie je rovnostranný ani rovnoramenný. Uvažujme spojnice vrcholov trojuholníka s vnútornými bodmi príslušných protiľahlých strán. Koncové body každej z týchto spojníc rozdeľujú obvod trojuholníka na dve rovnako dlhé časti. Musia byť nutne tieto tri spojnice rôzne dlhé?

Kategória BETA

Úlohy číslo **5, 6, 7** sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

Úloha č. 8:
Uvažujme kružnicu k so stredom S. Nech AB je ľubovoľná tetiva tejto kružnice. Označme CD priemer kružnice kolmý na AB a nech sa pretína s AB v bode M. Nech E je ľubovoľný bod vnútri kratšieho oblúka BC kružnice k. Ďalej P je priesečník EM s kružnicou k a L je priesečník ED s tetivou AB. Označme Q priesečník CL s kružnicou k. Dokážte, že úsečky AP a BQ sú rovnako dlhé.

Úloha č. 9:
Je daný rovnoramenný trojuholník ABC so základňou AB kratšou ako ramená. Nech X a Y sú v tomto poradí body na ramenách AC a BC, pričom XY má rovnakú dĺžku ako AB. Nech Z je taký bod v rovine, že trojuholník XYZ je zhodný s trojuholníkom ABC. Určte geometrické miesto bodov v rovine, ktoré vyplnia body Z pre všetky možné polohy trojuholníka XYZ.

Úloha č. 10:
Majme trojuholník ABC a nech r je os vonkajšieho uhla ABC, ďalej P a Q sú päty kolmíc z bodov A a C na priamku r. Označme M priesečník priamok CP a BA, označme N priesčník priamok AQ a BC. Ukážte že priamky MN, r a AC prechádzajú jedným bodom alebo sú navzájom rovnobežné.

Úloha č. 11:
V trojuholníku ABC má vnútorný uhol pri vrchole B veľkosť $120°$. Os uhla ABC pretína stranu AC v bode M a os vonkajšieho uhla BCA pretína priamku AB v bode P. Úsečka MP pretína stranu BC v bode K. Dokážte, že uhly AKM a KPC majú rovnakú veľkosť.

Kategória GAMA
Úlohy číslo **10** a **11** sú rovnaké ako v kategórii **BETA** a platí pre ne termín odoslania kategórie **BETA**. Najúspešnejší riešitelia kategórie GAMA za celý rok budú odmenení hodnotnou knihou podľa vlastného výberu.

Úloha č. 12:
Čísla $1, 2, 3, \ldots, 100$ sú usporiadané po obvode kruhu tak, že každé číslo je buď väčšie od svojich oboch susedov alebo je od oboch menšie. Ak vymazanie dvojice susedných čísel nenaruší túto charakteristiku, takúto dvojicu nazveme *superdvojica*. Určte najmenší možný počet *superdvojíc*.

Úloha č. 13:
Pre každé prirodzené číslo $n > 1$ nájdite najväčšie možné reálne číslo p také, že nerovnosť

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 \geq p(x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n + x_nx_1)$$

platí pre všetky n-tice nezáporných reálnych čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Úloha č. 14:
Vrcholom pravidelného šesťuholníka sú priradené nezáporné celé čísla, ktorých súčet je 2009. Dráčik si môže vybrať jeden vrchol a jeho číslo nahradiť absolútnou hodnotou rozdielu čísel priradených susedným vrcholom. Dokážte, že konečnou postupnosťou takýchto krokov môže Dráčik dosiahnuť, že vo všetkých vrcholoch bude číslo 0.

Fórum o príkladoch

Pre nedočkavcov nedočkavých funguje na stránke KMS diskusné fórum o príkladoch z KMS. Nájdete ho na adrese `kms.sk/forum` a môžete na ňom hneď po termíne nasledujúcej série začať diskutovať o vašom najobľúbenejšom alebo najmenej obľúbenom príklade.

Odporúčaná literatúra

Všetkým záujemcom o samostatné štúdium dávame do pozornosti archív KMS s adresou `kms.sk/archiv`. Môžete tam nájsť zadania aj vzorové riešenia úloh, ktoré sa doteraz v KMS vyskytli. Pri riešení týchto úloh a čítaní vzorových riešení sa isto naučíte a dozviete mnoho zaujímavého. Ďalšie zaujímavé stránky sú tiež:

`www.cut-the-knot.org`

`www.cbel.com/math_recreations`

Kategória **ALFA**, **BETA**: Termín odoslania riešení je **29. marca 2010** (pre zahraničie 26. marca 2010).

Kategória **GAMA**: Termín odoslania riešení je **2. apríla 2010**.

Naša adresa: KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava. `kms.sk`
Projekt č. LPP-0103-09 je riešený s finančnou podporou Agentúry na podporu výskumu a vývoja.