Korešpondenčný Matematický Seminár

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Univerzita Komenského

Slovenská komisia Matematickej olympiády

Jednota slovenských matematikov a fyzikov

Milí študenti, učitelia a ostatní matematickí nadšenci!

Dostávate do rúk úvodný leták zimnej časti 30. ročníka Korešpondenčného Matematického Seminára (KMS). Táto súťaž organizovaná občianskym združením Trojsten na pôde Fakulty matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave (FMFI UK) je pre stredoškolákov jedinečnou príležitosťou na zdokonalenie svojich matematických schopností a logického myslenia. Zručnosti a skúsenosti získané pri riešení tohto seminára, prípadne pri účasti na záverečnom sústredení, sú veľmi cennou devízou aj pri riešení Matematickej olympiády (MO). Mladším a začínajúcim študentom je určená kategória ALFA, pre starších a skúsenejších je kategória BETA a pre tých, čo majú vyššie ambície a chceli by uspieť na celoštátnom kole MO-A je určená kategória GAMA. Táto kategória má veľmi špecifický cieľ, ktorým je príprava študentov na CK MO-A a aj na Medzinárodnú matematickú olympiádu. Každý môže, samozrejme v rámci svojich možností, riešiť aj viac kategórií. Podrobnejšie informácie o jednotlivých kategóriách nájdete v pravidlách. Ak máte nejaké otázky alebo pripomienky, smelo nás kontaktujte e-mailom na adrese `kms@kms.sk`, prípadne ich pošlite písomne na adresu uvedenú pod zadaniami.

Veľa úspechov a radosti z riešenia vám želajú

vaši organizátori

Pravidlá KMS

Spoločné pre kategórie ALFA a BETA

Súťaž sa skladá z dvoch nezávislých častí – zimnej a letnej. Každá z nich prebieha v rámci školského polroka. Na konci každej časti budú najúspešnejší riešitelia pozvaní na záverečné sústredenie. Jedna časť pozostáva z troch sérií úloh. Zadania prvých dvoch sérií máte pred sebou a zadania tretej pošleme tým, ktorí nám pošlú prihlášku. Úlohy budú obodované počtom bodov od 0 po 9. Za každú sériu sa riešiteľovi do poradia započíta 5 úloh s najväčším bodovým ziskom.

Kategória ALFA

Kategóriu ALFA môžu riešiť len študenti stredných škôl, ktorí sa nezúčastnili celoštátneho kola matematickej olympiády a ktorých koeficient k_α je najviac 3.

Tento koeficient si môžeš vypočítať ako $k_\alpha = r+u+m$, kde číslo r je tvoj ročník a číslo u je počet tvojich úspešných semestrov (polrokov) pred začiatkom tohoto semestra. Semester považuj za úspešný, ak sa ti počas neho podarilo získať pozvánku na sústredenie KMS, alebo si sa ho zúčastnil ako náhradník. Nakoniec m je 1 v prípade, že si žiakom matematickej triedy a 0 v opačnom prípade.

Úlohu číslo 1 môžu súťažne riešiť len študenti s $k_\alpha \leq 1$ a úlohu číslo 2 len študenti s $k_\alpha \leq 2$. Ostatné úlohy $(3-7)$ môžu riešiť všetci riešitelia kategórie ALFA.

V tejto kategórii sa bude zostavovať päť regionálnych výsledkových listín a to pre regióny východné Slovensko, stredné Slovensko, západné Slovensko, Bratislava a zahraničie. Na záverečné sústredenie bude zvyčajne pozvaných 5 najúspešnejších riešiteľov z každého regiónu Slovenska, ďalších aspoň 5 podľa celkového bodového zisku a najúspešnejší riešitelia Matematickej olympiády. Ďalší riešitelia v poradí budú na sústredenie pozvaní ako náhradníci. Víťazi slovenských regiónov budú odmenení hodnotnými vecnými cenami. Žiaci základných škôl nebudú na sústredenie pozvaní.

Kategória BETA

Kategóriu BETA môžu riešiť všetci (aj zahraniční) študenti stredných škôl. Riešitelia ALFY sa vo výsledkovej listine BETY objavia až po sérii, v ktorej pošlú aspoň jednu z úloh 8, 9, 10 alebo 11.

Svoj koeficient k_β si vyrátaš nasledovne: $k_\beta = o + u_\beta$, kde číslo o je súčet počtu tvojich účastí na celoštátnom kole matematickej olympiády a počtu tvojich umiestnení medzi uspešnými riešiteľmi tohoto kola. Číslo u_β je počet tvojich úspešných semestrov (polrokov) v kategórii BETA, teda tých, za ktoré si bol pozvaný na sústredenie KMS kategórie BETA, alebo si sa ho zúčastnil ako náhradník.

Úlohu číslo 5 môžu súťažne riešiť len študenti s $k_\beta = 0$ a úlohu číslo 6 len študenti s $k_\beta \leq 2$. Ostatné úlohy $(7 - 11)$ môžu riešiť všetci riešitelia.

V tejto kategórii sa bude zostavovať jedna spoločná výsledková listina. Na záverečné sústredenie bude pozvaných aspoň 30 najúspešnejších riešiteľov, ďalší v poradí budú pozvaní ako náhradníci. Prví piati budú odmenení hodnotnými vecnými cenami.

Kategória GAMA

Súťaž prebieha celoročne a pozostáva zo šiestich sérií úloh. Zadania prvej a druhej série sú v tomto letáku, ďalšie pošleme tým, ktorí nám pošlú prihlášku. Úlohy 10 a 11 budú obodované počtom bodov od 0 po 9. Za správne riešenie ostatných úloh sa dá získať maximálne 7 bodov. Len v prípade, ak sa niekomu podarí dokázať všeobecnejšie tvrdenie ako v zadaní niektorej z týchto úloh, môže za danú úlohu dostať aj 8 alebo 9 bodov.

Do výsledkovej listiny sa počítajú všetky úlohy. Víťaz dostane hodnotnú vecnú cenu.

Spoločné pre všetky kategórie

- Príklady rieš samostatne. Riešenie každej úlohy riadne zdôvodni. V prípade, že v časti či celom riešení používaš odbornú literatúru, uveď jej názov, autora, vydavateľstvo, rok vydania a stranu. Samozrejme, aj v tomto prípade zašli kompletné riešenie. Za riešenie využívajúce výpočtovú techniku spravidla nedostaneš veľa bodov.
- Riešenia posielaj do termínu odoslania série. Ak posielaš riešenia z územia mimo Slovenskej Republiky, treba to stihnúť do uvedeného zahraničného termínu. Riešenia odoslané po termíne odoslania (rozhodujúca je pečiatka na obálke) spôsobujú značné organizačné problémy, *vyhradzujeme si preto právo udeliť nula bodov za všetky riešenia odoslané po termíne.*
- V kategórii GAMA treba príklady 10 a 11 odoslať do termínu odoslania kategórie BETA. Ostatné príklady kategórie GAMA majú zvyčajne termín o pár dní neskôr.
- Riešenie každého príkladu píš na samostatný papier formátu A4. Ku každému príkladu uveď svoje meno, triedu, školu a adresu! Vítané sú aj riešenia v angličtine a češtine a riešenia písané v TEXu. Z organizačných dôvodov nebudú opravované riešenia písané v iných jazykoch!
- Nedodržanie týchto pravidiel bude viesť k postihu.
- Pokiaľ máš dojem, že tvoje riešenie bolo nesprávne obodované, pošli čo najskôr písomnú sťažnosť. Nezabudni k nej priložiť aj originál sporného riešenia.
- Ak ti nie je v zadaniach čokoľvek jasné, alebo máš akékoľvek pochybnosti, netreba sa báť spýtať sa nás. Ideálny spôsob je zaslanie e-mailu na `kms@kms.sk`, prípadne listu na známu adresu KMS, OATČ KAGDM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava.

Prednášky

Riešiteľom z okolia Žiliny odporúčame navštíviť Matematický klub (MaK), ktorý má každú poslednú sobotu v mesiaci stretnutie v budove A Žilinskej univerzity (ružová budova na Hurbanovej ulici oproti hlavnej pošte) v čase $9^{00} - 14^{00}$. Okrem dvoch zaujímavých prednášok si máte možnosť s kamarátmi aj zašportovať. Nezabudnite, najbližší MaK sa koná už 27. 9. tohto roku.

.... TU ODSTRIHNI !!! ....

Prihláška do zimnej časti KMS 2008/2009 – **poslať spolu s 1. sériou!**

Meno a priezvisko: .... Dátum narodenia: ....
Škola: ....
Trieda .... so zameraním na matematiku: áno—nie
Počet účastí na celoštátnom kole MO: ...., z ktorých bolo .... úspešných.
Adresa domov: ....
Adresa pre poštu (domov – internát – škola): ....
Tel. domov: .... mobil (vlastný): .... e-mail: ....

Pozor! Podmienkou posielania korešpondencie domov je zaslanie 4 obálok A5 s adresami!

Zadania 1. série zimnej časti KMS 2008/2009

Kategória ALFA

Úloha č. 1:
Koľkými spôsobmi si Kaja, Kika a Katka môžu rozdeliť 33 rovnakých čokolád tak, aby niektoré dve z nich mali spolu dvakrát toľko ako tretia?

Úloha č. 2:
Ondrej mal armádu zloženú zo 100 hračkárskych katapultov. Postavil ich do radu a spustil paľbu. Najskôr vystrelil každý druhý katapult, potom každý tretí a tak ďalej až po každý stý. (Áno, vtedy vystrelil len ten posledný.) Ktorý katapult vystrelil najviac krát? Koľkokrát to bolo?

Úloha č. 3:
Čarovné číslo sa skladá z troch rôznych cifier. Z týchto cifier ďalej poskladáme všetky možné trojciferné čísla, pričom každú z cifier použijeme v každom čísle práve raz. Súčet týchto novozložených čísel je 2003. Nájdite všetky čarovné čísla.

Úloha č. 4:
Označme $\sigma(n)$ súčet všetkých deliteľov čísla n (napr. $\sigma(10) = 1 + 2 + 5 + 10 = 18$). Nazvime číslo n nákazlivé, ak $\sigma(n) > 2n$. Majme nejaké nákazlivé číslo a a vezmime si ľubovoľné prirodzené číslo b. Ukážte, že číslo $a \cdot b$ je tiež nákazlivé.

Poznámka: Znak σ je malé grécke písmeno sigma. Týmto písmenom sa tradične označuje okrem iného aj súčet deliteľov daného čísla. Mimochodom, veľká sigma sa píše Σ.

Úloha č. 5:
Máme nekonečne dlhý pásik papiera šírky 2 cm. Prehneme ho tak, že prekrývajúce sa vrstvy papiera vytvoria trojuholník. Aký najmenší obsah môže takýto trojuholník mať?

Úloha č. 6:
Pán a pani Smithovci boli na večierku, kde sa stretli s troma ďalšími manželskými pármi. Nastalo vzájomné podávanie rúk. Nikto nepodal ruku svojmu manželskému partnerovi, nikto nepodal ruku dvakrát tej istej osobe a samozrejme, nikto nepodal ruku sám sebe. Keď sa podávanie rúk skončilo, pán Smith sa každého vrátane svojej manželky opýtal, koľkokrát podal ruku. Na jeho prekvapenie každý dal inú odpoveď. Koľkokrát podala ruku pani Smithová?

Úloha č. 7:
Obdĺžnik rozmerov $1 \times k$, kde k je kladné celé číslo, budeme nazývať *zaujímavý*. Určte všetky prirodzené n, pre ktoré je možné rozrezať obdĺžnik $2008 \times n$ na niekoľko *zaujímavých* obdĺžnikov, pričom žiadne dva z nich nie sú rovnaké. Obdĺžniky, ktoré majú rovnaké rozmery, považujeme za rovnaké aj vtedy, keď je jeden z nich orientovaný vodorovne a druhý zvislo.

Poznámka: Štvorec považujte za špeciálny prípad obdĺžnika.

Kategória BETA

Úlohy číslo **5, 6, 7** sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

Úloha č. 8:
Na kružnici k so stredom O ležia rôzne body A, B, C, D, E v tomto poradí tak, že $|AB| = |BC|$. Označme S priesečník úsečiek BE a AD a T priesečník úsečiek BD a CE. Nech priamka ST pretína kružnicu k v bodoch X a Y. Dokážte, že $|BX| = |BY|$.

Úloha č. 9:
Predstavme si kovovú kružnicu, na ktorej sú rovnomerne rozložené čísla v poradí $1, 2, \ldots, N$. Na nej je položená otáčavá drevená kružnica, na ktorej sú opäť rovnomerne rozložené celé čísla $a_1, a_2, \ldots, a_N$ v tomto poradí. Súčet týchto N čísel je 1. Drevenú kružnicu vieme otočiť do N rôznych polôh tak, aby čísla na nej boli umiestnené práve nad číslami kovovej kružnice. Pre danú polohu drevenej kružnice urobíme súčet N súčinov takých, že vynásobíme číslo na drevenej kružnici s číslom na kovovej kružnici, ktoré sa nachádza pod ním. Keďže rôznych polôh drevenej kružnice je N, tak aj týchto súčtov dostaneme N. Ukážte, že všetky tieto súčty sú rôzne.

Úloha č. 10:
Dané sú nenulové celé čísla a, b, c také, že aj

$$u = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \quad \text{a} \quad v = \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}$$

sú celé čísla. Dokážte, že $|a| = |b| = |c|$.

Úloha č. 11:
Nech $p(x)$ je polynóm s celočíselnými koeficientmi a nech c_n je ciferný súčet čísla $p(n)$. Dokážte, že v nekonečnej postupnosti $c_1, c_2, c_3, \dots$ sa nejaká hodnota vyskytne nekonečne veľakrát.

Kategória GAMA
Úlohy číslo **10** a **11** sú rovnaké ako v kategórii **BETA** a platí pre ne termín odoslania kategórie **BETA**.

Úloha č. 12:
Zistite, či existujú funkcie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že pre každé reálne číslo x platia rovnosti

a) $f(g(x)) = x^2$, $g(f(x)) = x^3$

b) $f(g(x)) = x^2$, $g(f(x)) = x^4$

Úloha č. 13:
Postupnosť $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ je definovaná nasledovne:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, \\ a_2 &= 2, \\ a_3 &= 24, \\ a_n &= \frac{6a_{n-1}^2 a_{n-3} - 8a_{n-1}a_{n-2}^2}{a_{n-2}a_{n-3}} \quad \text{pre } n > 3. \end{aligned}$$

Dokážte, že n delí a_n pre každé prirodzené číslo n.

Úloha č. 14:
Nájdite rozdelenie pravouhlého trojuholníka so stranami 3, 4, 5 na štyri časti s najmenším možným priemerom. Priemer rozdelenia definujeme ako maximum zo vzdialeností medzi bodmi patriacimi do tej istej časti. Napríklad rozdelenie strednými priečkami má priemer 5/2.

Fórum o príkladoch

Pre nedočkavcov nedočkavých začalo na stránke KMS fungovať diskusné fórum o príkladoch z KMS. Nájdete ho na adrese `kms.sk/forum` a môžte na ňom hneď po termíne nasledujúcej série začať diskutovať o vašom najobľúbenejšom alebo najmenej obľúbenom príklade.

Odporúčaná literatúra

Všetkým záujemcom o samostatné štúdium dávame do pozornosti archív KMS s adresou `kms.sk/archiv`. Môžete tam nájsť zadania aj vzorové riešenia úloh, ktoré sa doteraz v KMS vyskytli. Pri riešení týchto úloh a čítaní vzorových riešení sa isto naučíte a dozviete mnoho zaujímavého. Ďalšie zaujímavé stránky sú tiež:

`www.cut-the-knot.org`

`www.cbel.com/math_recreations`

Kategória **ALFA**, **BETA**: Termín odoslania riešení je **6. októbra 2008** (pre zahraničie 3. októbra 2008).

Kategória **GAMA**: Termín odoslania riešení je **10. októbra 2008**.

Naša adresa: KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava. `kms.sk`

Zadania 2. série zimnej časti KMS 2008/2009

Kategória ALFA

<u>Úloha č. 1:</u>
Vezmime si všetky prirodzné čísla menšie ako 211112. Ktorých čísel je medzi nimi viac – tých, ktoré obsahujú cifru 1, alebo tých, ktoré ju neobsahujú?

<u>Úloha č. 2:</u>
Uvažujme prirodzené čísla, ktoré dávajú zvyšok 1 po delení každým z čísel $2, 3, 4, \ldots, 11$.
a) Nájdite dve rôzne takéto čísla.
b) Najmenej o koľko sa musia takéto dve rôzne čísla líšiť?

<u>Úloha č. 3:</u>
Zapíšte číslo 2008 ako súčet niekoľkých prirodzených čísel, ktorých súčin je maximálny a ukážte, že neexistuje lepšie riešenie.

<u>Úloha č. 4:</u>
Bod P leží vnútri štvorca $ABCD$. Označme p a q rovnobežky so stranami tohto štvorca prechádzajúce bodom P. Ďalej označme r a s rovnobežky s uhlopriečkami štvorca opäť prechádzajúce bodom P. Priamky p, q, r a s celkovo rozdelia štvorec $ABCD$ na 8 častí. Ofarbime teraz tieto časti striedavo modrou a červenou farbou tak, aby každé dve časti susediace stranou mali rôznu farbu. Dokážte, že súčet obsahov častí, ktoré sú ofarbené na modro, je polovica z obsahu štvorca $ABCD$.

<u>Úloha č. 5:</u>
Na stranách rovnobežníka $ABCD$ zvoľme postupne body K, L, M, N (na každej strane jeden) tak, že $KLMN$ je štvoruholník s dvakrát menším obsahom ako $ABCD$. Ukážte, že aspoň jedna z uhlopriečok štvoruholníka $KLMN$ je rovnobežná s niektorou zo strán rovnobežníka.

<u>Úloha č. 6:</u>
Nech n je prirodzené číslo, ktoré je väčšie ako 1. Uvažujme nerovnosť

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \geq (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1})a_n$$

kde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sú ľubovoľné nezáporné reálne čísla.
a) Dokážte, že daná nerovnosť platí pre $n = 2$.
b) Nájdite všetky ďalšie n, pre ktoré je nerovnosť splnená.

<u>Úloha č. 7:</u>
Klokan má karty, na ktorých sú čísla od 1 po n. Pozrie sa na prvú kartu. Ak je na nej číslo k, zmení zrkadlovo poradie prvých k kariet. Takto pokračuje až kým nedostane na prvej karte číslo 1. Musí sa mu to vždy po konečnom počte krokov podariť?

Kategória BETA

Úlohy číslo **5, 6, 7** sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

<u>Úloha č. 8:</u>
Nech $a_1, a_2, \ldots, a_{83}$ sú kladné reálne čísla. Dokážte, že

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{83} \leq 82 + b_1 b_2 \cdots b_{83},$$

kde b_i je väčšie z čísel $\{1, a_i\}$ pre $i = 1, 2, \ldots, 83$.

<u>Úloha č. 9:</u>
Nech k a ℓ sú dve kružnice také, že stred S kružnice k leží na kružnici ℓ. Navyše sa kružnice k a ℓ pretínajú v dvoch rôznych bodoch M a N. Nech AB je ľubovoľný priemer kružnice k taký, že $|AM| > 0$ a $|BN| > 0$. Označme (v tomto poradí) A_1 a B_1 druhé priesečníky priamok AM a BN s kružnicou ℓ. Dokážte, že dĺžka úsečky A_1B_1 je rovná polomeru kružnice k.

<u>Úloha č. 10:</u>
Nájdite všetky prvočísla p, pre ktoré existujú kladné celé čísla n, x, y spĺňajúce rovnosť

$$p^n = x^3 + y^3.$$

Úloha č. 11:
Nech $d(n)$ označuje počet kladných deliteľov čísla $n^2 + n + 1$, kde n je prirodzené číslo. Dokážte, že nerovnosť

$$d(n) \geq d(n+1)$$

platí pre nekonečne veľa rôznych prirodzených čísel n.

Kategória GAMA
Úlohy číslo **10** a **11** sú rovnaké ako v kategórii **BETA** a platí pre ne termín odoslania kategórie **BETA**.

Úloha č. 12:
Kúzelníci Miťo a Mazo si pripravili malé vystúpenie. Na začiatku je v miestnosti s divákmi len Mazo. Diváci uložia n mincí do ľubovoľnej postupnosti znakov a hláv a vyberú si jedno číslo z množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$. Mazo potom otočí práve jednu mincu naopak a zavolá Miťa zo zákulisia, ktorý sa z rozloženia mincí snaží uhádnuť, aké číslo si diváci vybrali.

a) Dokážte, že ak sa toto kúzlo dá spraviť pre n_1 a n_2, potom sa dá spraviť aj pre $n_1 n_2$.

b) Nájdite všetky n, pre ktoré sa toto kúzlo dá spraviť.

Úloha č. 13:
Stred opísanej kružnice trojuholníka ABC označme O. Priamka prechádzajúca bodom O pretína vnútra strán AB a AC v bodoch M a N. Označme S a R stredy úsečiek BN a CM. Dokážte, že uhly ROS a BAC sú rovnaké.

Úloha č. 14:
Galéria moderného umenia má tvar n-uholníka (nie nutne konvexného). Vedenie galérie sa v nej rozhodlo rozostaviť niekoľko statických kamier so zorným uhlom 360 stupňov. Koľko najmenej (v závislosti od n) kamier potrebujeme, aby sme určite vedeli ustrážiť celú galériu?

Fórum o príkladoch

Pre nedočkavcov nedočkavých začalo na stránke KMS fungovať diskusné fórum o príkladoch z KMS. Nájdete ho na adrese `kms.sk/forum` a môžte na ňom hneď po termíne nasledujúcej série začať diskutovať o vašom najobľúbenejšom alebo najmenej obľúbenom príklade.

Odporúčaná literatúra

Všetkým záujemcom o samostatné štúdium dávame do pozornosti archív KMS s adresou `kms.sk/archiv`. Môžete tam nájsť zadania aj vzorové riešenia úloh, ktoré sa doteraz v KMS vyskytli. Pri riešení týchto úloh a čítaní vzorových riešení sa isto naučíte a dozviete mnoho zaujímavého. Ďalšie zaujímavé stránky sú tiež:

`www.cut-the-knot.org`

`www.cbel.com/math_recreations`

Kategória **ALFA**, **BETA**: Termín odoslania riešení je **3. novembra 2008** (pre zahraničie 31. októbra 2008).

Kategória **GAMA**: Termín odoslania riešení je **7. novembra 2008**.

Naša adresa: KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava. `kms.sk`