Korešpondenčný Matematický Seminár

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Univerzita Komenského

Slovenská komisia Matematickej olympiády

Jednota slovenských matematikov a fyzikov

Milí študenti, učitelia a ostatní matematickí nadšenci!

Dostávate do rúk úvodný leták zimnej časti 29. ročníka Korešpondenčného Matematického Seminára (KMS). Táto súťaž organizovaná občianskym združením Trojsten na pôde Fakulty matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave (FMFI UK) je pre stredoškolákov jedinečnou príležitosťou na zdokonalenie svojich matematických schopností a logického myslenia. Zručnosti a skúsenosti získané pri riešení tohto seminára, prípadne pri účasti na záverečnom sústredení, sú veľmi cennou devízou aj pri riešení Matematickej olympiády (MO). Mladším a začínajúcim študentom je určená kategória ALFA, pre starších a skúsenejších je kategória BETA a pre tých, čo majú vyššie ambície a chceli by uspieť na celoštátnom kole MO-A je určená kategória GAMA. Táto kategória má veľmi špecifický cieľ, ktorým je príprava študentov na CK MO-A a aj na Medzinárodnú matematickú olympiádu. Každý môže, samozrejme v rámci svojich možností, riešiť aj viac kategórií. Podrobnejšie informácie o jednotlivých kategóriách nájdete v pravidlách. Ak máte nejaké otázky alebo pripomienky, smelo nás kontaktujte e-mailom na adrese `kms@kms.sk`, prípadne ich pošlite písomne na adresu uvedenú pod zadaniami.

Veľa úspechov a radosti z riešenia vám želajú

vaši organizátori

Pravidlá KMS

Spoločné pre kategórie ALFA a BETA

Súťaž sa skladá z dvoch nezávislých častí – zimnej a letnej. Každá z nich prebieha v rámci školského polroka. Na konci každej časti budú najúspešnejší riešitelia pozvaní na záverečné sústredenie. Jedna časť pozostáva z troch sérií úloh. Zadania prvých dvoch sérií máte pred sebou a zadania tretej pošleme tým, ktorí nám pošlú prihlášku. Úlohy budú obodované počtom bodov od 0 po 9. Za každú sériu sa riešiteľovi do poradia započíta 5 úloh s najväčším bodovým ziskom.

Kategória ALFA

Kategóriu ALFA môžu riešiť len študenti stredných škôl, ktorí sa nezúčastnili celoštátneho kola matematickej olympiády a ktorých koeficient k_α je najviac 3.

Tento koeficient si môžeš vypočítať ako $k_\alpha = r+u+m$, kde číslo r je tvoj ročník a číslo u je počet tvojich úspešných semestrov (polrokov) pred začiatkom tohoto semestra. Semester považuj za úspešný, ak sa ti počas neho podarilo získať pozvánku na sústredenie KMS, alebo si sa ho zúčastnil ako náhradník. Nakoniec m je 1 v prípade, že si žiakom matematickej triedy a 0 v opačnom prípade.

Úlohu číslo 1 môžu súťažne riešiť len študenti s $k_\alpha \le 1$ a úlohu číslo 2 len študenti s $k_\alpha \le 2$. Ostatné úlohy $(3-7)$ môžu riešiť všetci riešitelia kategórie ALFA.

V tejto kategórii sa bude zostavovať päť regionálnych výsledkových listín a to pre regióny východné Slovensko, stredné Slovensko, západné Slovensko, Bratislava a zahraničie. Na záverečné sústredenie bude pozvaných 5 najúspešnejších riešiteľov z každého regiónu Slovenska, ďalších 5 s najlepším bodovým ziskom celkovo a najúspešnejší riešitelia Matematickej olympiády. Ďalší riešitelia v poradí budú na sústredenie pozvaní ako náhradníci. Víťazi Slovenských regiónov budú odmenení hodnotnými vecnými cenami. Žiaci základných škôl nebudú na sústredenie pozvaní.

Kategória BETA

Kategóriu BETA môžu riešiť všetci (aj zahraniční) študenti stredných škôl. Riešitelia ALFY sa vo výsledkovej listine BETY objavia až po sérii, v ktorej pošlú aspoň jednu z úloh 8, 9, 10 alebo 11.

Svoj koeficient k_β si vyrátaš nasledovne: $k_\beta = o + u_\beta$, kde číslo o je súčet počtu tvojich účastí na celoštátnom kole matematickej olympiády a počtu tvojich umiestnení medzi uspešnými riešiteľmi tohoto kola. Číslo u_β je počet tvojich úspešných semestrov (polrokov) v kategórii BETA, teda tých, za ktoré si bol pozvaný na sústredenie KMS kategórie BETA, alebo si sa ho zúčastnil ako náhradník.

Úlohu číslo 5 môžu súťažne riešiť len študenti s $k_\beta = 0$ a úlohu číslo 6 len študenti s $k_\beta \leq 2$. Ostatné úlohy $(7-11)$ môžu riešiť všetci riešitelia.

V tejto kategórii sa bude zostavovať jedna spoločná výsledková listina. Na záverečné sústredenie bude pozvaných aspoň 30 najúspešnejších riešiteľov, ďalší v poradí budú pozvaní ako náhradníci. Prví piati budú odmenení hodnotnými vecnými cenami.

Kategória GAMA

Súťaž prebieha celoročne a pozostáva zo šiestich sérií úloh. Zadania prvých dvoch sérií sú v tomto letáku a ďalšie pošleme tým, ktorí nám pošlú prihlášku. Úlohy 10 a 11 budú obodované počtom bodov od 0 po 9. Za správne riešenie ostatných úloh sa dá získať maximálne 7 bodov. Len v prípade, ak sa niekomu podarí dokázať všeobecnejšie tvrdenie ako v zadaní niektorej z týchto úloh, môže za danú úlohu dostať aj 8 alebo 9 bodov.
Do výsledkovej listiny sa počítajú všetky úlohy. Víťaz dostane hodnotnú vecnú cenu.

Spoločné pre všetky kategórie

- Príklady rieš samostatne. Riešenie každej úlohy riadne zdôvodni. V prípade, že v časti či celom riešení používaš odbornú literatúru, uveď jej názov, autora, vydavateľstvo, rok vydania a stranu. Samozrejme, aj v tomto prípade zašli kompletné riešenie. Za riešenie využívajúce výpočtovú techniku spravidla nedostaneš veľa bodov.
- Riešenia posielaj do termínu odoslania série. Ak posielaš riešenia z územia mimo Slovenskej Republiky, treba to stihnúť do uvedeného zahraničného termínu. Riešenia odoslané po termíne odoslania (rozhodujúca je pečiatka na obálke) spôsobujú značné organizačné problémy, a preto nebudú opravené.
- Riešenie každého príkladu píš na samostatný papier formátu A4. Ku každému príkladu uveď svoje meno, triedu, školu a adresu! Vítané sú aj riešenia v angličtine a češtine a riešenia písané v TeXu. Z organizačných dôvodov nebudú opravované riešenia písané v iných jazykoch!
- Nedodržanie týchto pravidiel bude viesť k postihu.
- Pokiaľ máš dojem, že tvoje riešenie bolo nesprávne obodované, pošli čo najskôr písomnú sťažnosť. Nezabudni k nej priložiť aj originál sporného riešenia.
- Ak ti nie je v zadaniach čokoľvek jasné, alebo máš akékoľvek pochybnosti, netreba sa báť spýtať sa nás. Ideálny spôsob je zaslanie e-mailu na `kms@kms.sk`, prípadne listu na známu adresu KMS, OATČ KAGDM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava.

Prednášky

Riešiteľom z okolia Žiliny odporúčame navštíviť Matematický klub (MaK), ktorý má každú poslednú sobotu v mesiaci stretnutie v budove A Žilinskej univerzity (ružová budova na Hurbanovej ulici oproti hlavnej pošte) v čase $9^{00} - 14^{00}$. Okrem dvoch zaujímavých prednášok si máte možnosť s kamarátmi aj zašportovať. Nezabudnite, najbližší MaK sa koná už 29.9. tohto roku.

. . . . TU ODSTRIHNI !!! . . . .

Prihláška do zimnej časti KMS 2007/2008 – **poslať spolu s 1. sériou!**

Meno a priezvisko: . . . . Dátum narodenia: . . . .
Škola: . . . .
Trieda . . . . so zameraním na matematiku: áno—nie
Počet účastí na celoštátnom kole MO: . . . . , z ktorých bolo . . . . úspešných.
Adresa domov: . . . .
Adresa pre poštu (domov – internát – škola): . . . .
Tel. domov: . . . . mobil (vlastný): . . . . e-mail: . . . .

Pozor! Podmienkou posielania korešpondencie domov je zaslanie 4 obálok A5 s adresami!

Zadania 1. série zimnej časti KMS 2007/2008

Kategória ALFA

Úloha č. 1:
a) V Krajine majú mince s hodnotami 10 a 11 korún krajinských. Problém však je, že niektoré sumy sa nimi bez vydávania nedajú zaplatiť. Nájdite najvyššiu takú sumu.
b) Vláda v snahe zlepšiť situáciu zaradila do obehu aj mince s hodnotou 12 korún krajinských. Asi je vám jasné, že toto opatrenie vlády stále nestačí na to, aby sa dali zaplatiť všetky možné sumy. Aká je teraz najvyššia suma, ktorá sa nedá zaplatiť bez vydávania?

Úloha č. 2:
Marta a Irena sú roboty skúmajúce povrch Marsu, ktoré sa oba pohybujú rovnomerným priamočiarym pohybom smerom ku sebe. Na poludnie boli od seba vzdialené presne 90 km, o nejaký čas neskôr sa tesne minuli a o druhej poobede už boli opäť od seba vzdialené 90 km. Inžinier Sirup pracujúci v kontrolnom centre vypočítal, že súčet vzdialenosti precestovanej Martou pred stretnutím s Irenou a vzdialenosti precestovanej Irenou po stretnutí s Martou je 60 km. Môže mať inžinier Sirup pravdu?

Úloha č. 3:
Na súťaži v jedení gumených medvedíkov sa zúčastnili štyria súťažiaci A, B, C a D. Tu je záznam z ich rozhovoru pred súťažou:
A: „Vyhrám ja!"
B: „Ja som chlapec a budem prvý!"
C: „Chlapci sa mýlia, D skončí jedno miesto za mnou a za A už nebudú žiadni chlapci."
D: „C má pravdu a za A už nebudú žiadne dievčatá."
Po súťaži sa ukázalo, že práve dve z týchto štyroch tvrdení boli pravdivé. Zistite ako dopadla súťaž a aké sú pohlavia súťažiacich ak viete, že sú medzi nimi práve dvaja chlapci a že žiadni dvaja súťažiaci neskončili na tom istom mieste.

Úloha č. 4:
Nech $ABCD$ je konvexný štvoruholník, ktorého vnútorné uhly BAD a BCD majú rovnakú veľkosť. Os uhla ABC pretína priamku AD v bode P. Kolmica z bodu A na priamku BP pretína priamku BC v bode Q. Dokážte, že priamky PQ a CD sú rovnobežné.

Úloha č. 5:
a) Majme číslo zapísané v desiatkovej sústave ako $c_n c_{n-1} c_{n-2} \dots c_2 c_1 c_0$. Toto číslo je deliteľné jedenástimi práve vtedy, keď je jedenástimi deliteľné číslo $(c_0 + c_2 + c_4 + \dots) - (c_1 + c_3 + c_5 + \dots)$ (teda rozdiel súčtov cifier na párnych a nepárnych miestach). Vyskúšajte si to na vašom rodnom čísle, malo by byť deliteľné jedenástimi. Prečo toto pravidlo funguje? (Skúste využiť, že každá párna mocnina desiatich, teda $1, 10^2, 10^4, \dots,$ dáva zvyšok 1 po delení jedenástimi, nepárne mocniny desiatich zas dávaju zvyšok 10 po delení jedenástimi.)
b) Máme 19 kartičiek a na každú z nich chceme napísať niektorú z cifier okrem nuly. Dá sa to spraviť tak, aby sa potom z týchto kartičiek dalo zložiť iba jediné 19-ciferné číslo deliteľné jedenástimi?

Úloha č. 6:
V štvorcom parku je do štvorcovej mriežky umiestnených 10000 stromov. Koľko z nich sa dá najviac vyťať tak, aby zo žiadneho pňa nebolo vidieť iný peň? Dokážte, že viac pňov sa už takto vyťať nedá.

Úloha č. 7:
Dokážte, že pre ľubovoľné $n > 2$ vieme nájsť n navzájom rôznych prirodzených čísel tak, že súčet ich prevrátených hodnôt je 1.

Kategória BETA

Úlohy číslo **5, 6, 7** sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

Úloha č. 8:
Nech ABC je ostrouhlý trojuholník s vnútorným uhlom $30°$ pri vrchole A. Nech V je priesečník jeho výšok a M stred strany BC. Označme U obraz bodu V v stredovej súmernosti so stredom M. Dokážte, že $|AU| = 2|BC|$.

Úloha č. 9:
a) Cifry prirodzeného čísla sme preusporiadali a číslo, ktoré vzniklo, sme pripočítali k pôvodnému. Dokážte, že nám nemohol výjsť výsledok $\underbrace{999\ldots99}_{999-\text{krát}}$.
b) Cifry prirodzeného čísla sme preusporiadali a číslo, ktoré vzniklo, sme pripočítali k pôvodnému. Dostali sme tak výsledok 10^{10}. Dokážte, že pôvodné číslo bolo deliteľné desiatimi.

Úloha č. 10:
Rasťo má na záhrade ešte stále vyrytú šachovnicu s 2007×2007 políčkami. So sestrou Slávkou si povedli, že si zmerajú sily. Presne v strede šachovnice sa nachádza obrovský kameň ktorý najprv Rasťo posunie o jedno políčko (rovnobežne so stranami šachovnice). Slávka ho potom bude musieť posunúť o dve políčka, Rasťo o štyri políčka, Slávka o osem políčok – v k-tom ťahu ho vždy budú musieť posunúť o 2^{k-1} políčok. Ten kto je na ťahu prehráva, ak už nemôže posunúť kameň. Nájdite výhernú stratégiu pre Slávku alebo pre Rasťa.

Úloha č. 11:
Vyber si vlastné dobrodružstvo! Na plný počet bodov stačí vyriešiť jednu z nasledujúcich úloh.
a) V 99 škatuliach sa nachádzajú nejaké jablká a nejaké pomaranče. Dokážte, že môžeme vybrať 50 škatúľ tak, že obsahujú aspoň polovicu všetkých jabĺk a aspoň polovicu všetkých pomarančov.
b) V 100 škatuliach sa nachádzajú nejaké jablká a nejaké pomaranče. Dokážte, že môžeme vybrať 34 škatúľ tak, že obsahujú aspoň tretinu všetkých jabĺk a aspoň tretinu všetkých pomarančov.
c) V 100 škatuliach sa nachádzajú nejaké jablká, nejaké pomaranče a nejaké banány. Dokážte, že môžeme vybrať 51 škatúľ tak, že obsahujú aspoň polovicu všetkých jabĺk, aspoň polovicu všetkých pomarančov a aspoň polovicu všetkých banánov.

Kategória GAMA
Úlohy číslo **10** a **11** sú rovnaké ako v kategórii **BETA**.
Pozor, nezabudni na zmenu termínu!

Úloha č. 12:
Nech ABC je trojuholník a I stred kružnice doň vpísanej. Os vnútorného uhla ABC pretne priamku AC v bode P. Dokážte, že ak $|AP| + |AB| = |BC|$, tak je trojuholník API rovnoramenný.

Úloha č. 13:
Dokážte, že pre kladné reálne čísla a, b, c platí

$$\frac{a^2+b^2}{c^2+ab} + \frac{b^2+c^2}{a^2+bc} + \frac{c^2+a^2}{b^2+ca} \geq 3.$$

Úloha č. 14:
Tri rovnaké odmerky sú do troch štvrtín naplnené rôznymi kvapalinami. Zistite, či je možné konečným počtom prelievaní dosiahnuť, aby v aspoň jednej odmerke vznikla zmes, ktorá obsahuje rovnaké množstvo každej kvapaliny. Kvapaliny možno prelievať, nie však vylievať.

Odporúčaná literatúra

Všetkým záujemcom o samostatné štúdium dávame do pozornosti archív KMS s adresou `www.kms.sk/archiv`. Môžete tam nájsť zadania aj vzorové riešenia všetkých príkladov, ktoré sa doteraz v KMS vyskytli. Pri riešení týchto príkladov a čítaní vzorových riešení sa isto naučíte a dozviete mnoho zaujímavého.

Kategória **ALFA**, **BETA**: Termín odoslania riešení je **1. októbra 2007** (pre zahraničie 28. septembra 2007).

Kategória **GAMA**: Termín odoslania riešení je **4. októbra 2007**.

Naša adresa: KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava. `www.kms.sk`

Zadania 2. série zimnej časti KMS 2007/2008

Kategória ALFA

Úloha č. 1:
Trojuholník ABC je rozdelený na dva trojuholníky ADC a BCD, ktoré sú rovnoramenné a majú rovnaký obsah. Veľkosť uhla ADC je $100°$. Aká je veľkosť uhla ABC?

Úloha č. 2:
Na zemi je nakreslená nekonečná štvorčeková sieť, pričom na jednom z políčok stojí kocka, ktorej stena je rovnako veľká ako toto políčko. Kocka je celá čierna, len vrchnú stenu má natretú nabielo. Kocku začneme kotúľať po šachovnici a chceme, aby sa vrátila na pôvodné miesto tak, že biela stena bude naspodku. Vieme to dosiahnuť presne po 2008 krokoch? A čo tak po 2007 krokoch?

Úloha č. 3:
Ondráč od svojho pobytu v Ostrave nemá pizzu Quattro Formaggi veľmi v láske. Povedal si však, že jej dá ešte šancu. Na celú si ale netrúfa, zobral preto so sebou aj Škrečka, ktorý vždy rád pomôže. Aby to nekomplikovali, rozhodli sa, že pizzu rozdelia dvoma priamymi na seba kolmými rezmi, z ktorých žiaden neprechádza stredom, na štyri časti a každý si vezme dva protiľahlé kúsky. Škrečok si vybral tie dva, z ktorých jeden obsahoval stred pizze. Dokážte, že získal väčšiu časť pizze.

Úloha č. 4:
Štvorciferné číslo n, ktoré neobsahuje vo svojom zápise v desiatkovej sústave číslicu 9, je druhou mocninou prirodzeného čísla. Keď zväčšíme každú jeho číslicu o 1, dostaneme opäť druhú mocninu prirodzeného čísla. Nájdite všetky štvorciferné čísla s touto vlastnosťou.

Úloha č. 5:
Nech r je polomer kružnice vpísanej pravouhlému trojuholníku ABC a h je výška na preponu AB. Táto výška delí trojuholník ABC na dva menšie trojuholníky. Nech r_1 a r_2 sú polomery kružníc vpísaných týmto trojuholníkom. Dokážte, že platí

a) $r_1 + r_2 + r = h$,

b) $r_1^2 + r_2^2 = r^2$.

Úloha č. 6:
Každé prirodzené číslo je zafarbené buď červenou alebo zelenou farbou tak, že sú splnené nasledujúce podmienky:

1. Súčet troch červených (nie nutne rôznych) čísel je vždy červené číslo.
2. Súčet troch zelených (nie nutne rôznych) čísel je vždy zelené číslo.
3. Aspoň jedno číslo je zelené a aspoň jedno číslo je červené.

Nájdite všetky ofarbenia, ktoré spĺňajú tieto podmienky.

Úloha č. 7:
Dada má krúžok a na ňom n kľúčov ($n \geq 3$). Keď ho vyberie z vrecka, nevie, či sa jej náhodou nepootočil alebo neobrátil. Jediný spôsob, ako rozlíšiť kľúče, je zafarbiť ich (každý kľúč dostane jednu farbu). Aký je najmenší možný počet farieb, ktoré Dada potrebuje?

Kategória BETA

Úlohy číslo **5, 6, 7** sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

Úloha č. 8:
Pokúsme sa do roviny umiestniť $n \geq 3$ bodov tak, aby žiadne tri neležali na jednej priamke a aby medzi týmito n bodmi bolo čo najviac trojíc ktoré tvoria vrcholy rovnoramenného trojuholníka. Označme $f(n)$ najväčší možný počet rovnoramenných trojuholníkov ktorý takto vieme dosiahnuť s n bodmi. Dokážte, že existujú kladné reálne konštanty a, b také, že pre všetky $n \geq 3$ platí $an^2 < f(n) < bn^2$.

Úloha č. 9:
Máme ostrouhlý trojuholník ABC. Body B', C' sú v tomto poradí súmerné s bodmi B, C v osovej súmernosti podľa priamok AC, AB. Kružnice opísané trojuholníkom ABB' a ACC' sa pretínajú v bodoch A a P. Dokážte, že priamka PA prechádza stredom O kružnice opísanej trojuholníku ABC.

Úloha č. 10:
Čísla $x_1, x_2 \ldots, x_n$ z intervalu $\langle 0, 1\rangle$ spĺňajú vzťah $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m + r$, kde m je celé číslo a $r \in \langle 0, 1)$. Dokážte, že $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq m + r^2$.

Úloha č. 11:
Pre prirodzené čísla x a y platí $3x^2 + x = 4y^2 + y$.
a) Dokážte, že $x - y$ je druhou mocninou prirodzeného čísla. (*4 body*)
b) Dokážte, že zadaná rovnica má nekonečne veľa riešení. (*4 body*)
c) Nájdite všetky riešenia tejto rovnice. (*1 bod*)

Kategória GAMA
Úlohy číslo **10** a **11** sú rovnaké ako v kategórii **BETA**.
Pozor, nezabudni na zmenu termínu!

Úloha č. 12:
Nájdite prirodzené číslo n také, že číslo a) $n^2 - 1$, b) $n^2 - 4$ má presne 10 deliteľov.

Úloha č. 13:
Daný je trojuholník ABC so stredom vpísanej kružnice I. Osi vnútorných uhlov pri vrcholoch A a C pretínajú kružnicu opísanú trojuholníku ABC v bodoch A_0 a C_0 a úsečky BC a BA po rade v bodoch A_1 a C_1. Predpokladajme, že sa priamky A_1C_1 a A_0C_0 pretínajú v bode P. Dokážte, že priamka PI je rovnobežná s priamkou AC.

Úloha č. 14:
Šachovnica 3000×3000 je rozdelená na dominové doštičky (teda obdĺžniky veľkosti 1×2). Dokážte, že vieme dominové doštičky ofarbiť tromi farbami tak, aby doštičiek jednotlivých farieb bolo rovnako veľa a aby žiadna doštička nemala viac ako dvoch susedov takej farby, akú má sama.

Odporúčaná literatúra

Všetkým záujemcom o samostatné štúdium dávame do pozornosti archív KMS s adresou `www.kms.sk/archiv`. Môžete tam nájsť zadania aj vzorové riešenia všetkých príkladov, ktoré sa doteraz v KMS vyskytli. Pri riešení týchto príkladov a čítaní vzorových riešení sa isto naučíte a dozviete mnoho zaujímavého.

Kategória **ALFA**, **BETA**: Termín odoslania riešení je **29. októbra 2007** (pre zahraničie 26. októbra 2007).

Kategória **GAMA**: Termín odoslania riešení je **2. novembra 2007**.

Naša adresa: KMS, OATČ KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava. `www.kms.sk`