Korešpondenčný Matematický Seminár

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Univerzita Komenského

Slovenská komisia Matematickej olympiády

Jednota slovenských matematikov a fyzikov

Milí študenti, učitelia a ostatní matematickí nadšenci.

Dostávate do rúk úvodný leták 26. ročníka Korešpondenčného Matematického Seminára (KMS). Táto súťaž organizovaná občianskym združením Trojsten na pôde Fakulty matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave (FMFI UK) je pre stredoškolákov jedinečnou príležitosťou na zdokonalenie svojich matematických schopností a logického myslenia. Zručnosti a skúsenosti získané pri riešení tohto seminára, prípadne pri účasti na záverečnom sústredení, sú veľmi cennou devízou aj pri riešení Matematickej olympiády (MO). Mladším a začínajúcim študentom je určená kategória ALFA, pre starších a skúsenejších je kategória BETA a pre tých, čo majú vyššie ambície a chceli by uspieť na celoštátnom kole MO-A je určená kategória GAMA. Táto kategória má veľmi špecifický cieľ, ktorým je príprava študentov na CK MO-A a aj na Medzinárodnú matematickú olympiádu. Každý môže, samozrejme v rámci svojich možností, riešiť aj viac kategórií. Podrobnejšie informácie o jednotlivých kategóriach nájdete v pravidlách. Ak máte nejaké otázky alebo pripomienky, smelo nás kontaktujte e-mailom na adresách ktoré nájdete na našej internetovej stránke `kms.sturak.sk`, prípadne ich pošlite písomne na adresu uvedenú pod zadaniami.

Veľa radosti z dobrých nápadov pri riešení vám želajú vaši

organizátori

Pravidlá KMS

Spoločné pre kategórie ALFA a BETA

Súťaž sa skladá z dvoch nezávislých častí – zimnej a letnej. Každá z nich prebehia v rámci školského polroka. Na konci každej časti budú najúspešnejší riešitelia pozvaní na záverečné sústredenie. Jedna časť pozostáva z troch sérií úloh. Zadania prvých dvoch máte pred sebou a zadania tretej pošleme tým, ktorí nám pošlú prihlášku. Úlohy budú obodované počtom bodov od 0 po 9. Za každú sériu sa riešiteľovi do poradia započíta 5 úloh s najväčším bodovým ziskom.

Kategória ALFA

Kategóriu ALFA môžu riešiť len študenti slovenských stredných škôl, ktorí sa nezúčastnili celoštátneho kola matematickej olympiády a ktorých koeficient k_α je najviac 3.

Tento koeficient si vypočítaš ako $k_\alpha = r + u + m$, kde číslo r je tvoj ročník a číslo u je počet tvojich úspešných semestrov (polrokov) pred začiatkom tohoto školského roka. Semester považuj za úspešný, ak sa ti počas neho podarilo získať pozvánku na sústredenie KMS, alebo si sa ho zúčastnil ako náhradník. Nakoniec m je 1 v prípade, že si žiakom matematickej triedy a 0 v opačnom prípade.

Úlohu číslo 1 môžu súťažne riešiť len študenti s $k_\alpha \leq 1$ a úlohu číslo 2 len študenti s $k_\alpha \leq 2$. Ostatné úlohy $(3-7)$ môžu riešiť všetci riešitelia.

V tejto kategórii sa budú zostavovať štyri regionálne výsledkové listiny a to pre regióny Východné Slovensko, Stredné Slovensko, Západné Slovensko a Bratislava. Na záverečné sústredenie bude pozvaných 6 najúspešnejších riešiteľov z každého regiónu a ďalších šesť s najlepším bodovým ziskom celkovo. Víťazi v regióne budú odmenení hodnotnými vecnými cenami. Žiaci základných škôl nebudú na sústredenie pozvaní.

Kategória BETA

Kategóriu BETA môžu riešiť všetci (aj zahraniční) študenti stredných škôl. Riešitelia ALFY sa vo výsledkovej listine BETY objavia až po sérii, v ktorej pošlú aspoň jednu z úloh 8, 9, 10 alebo 11.

Svoj koeficient k_β si vyrátaš nasledovne: $k_\beta = o + u_\beta$, kde číslo o je súčet počtu tvojich účastí na celoštátnom kole matematickej olympiády a počtu tvojich umiestnení medzi uspešnými riešiteľmi tohoto kola. Číslo u_β je počet tvojich úspešných semestrov (polrokov) v kategórii BETA, teda tých, za ktoré si bol pozvaný na sústredenie KMS kategórie BETA, alebo si sa ho zúčastnil ako náhradník.

Úlohu číslo 5 môžu súťažne riešiť len študenti s $k_\beta = 0$ a úlohu číslo 6 len študenti s $k_\beta \leq 2$. Ostatné úlohy $(7-11)$ môžu riešiť všetci riešitelia.

V tejto kategórii sa bude zostavovať jedna spoločná výsledková listina. Na záverečné sústredenie bude pozvaných 30 najúspešnejších riešiteľov. Prví piati budú odmenení hodnotnými vecnými cenami. Ak sa niekomu podarí splniť podmienky pre účasť na sústredení ALFY aj BETY v tom istom semestri, bude pozvaný na sústredenie BETY a na sústredenie ALFY bude namiesto neho pozvaný ďalší v poradí.

Kategória GAMA

Súťaž prebieha celoročne a pozostáva zo šiestich sérií úloh. Zadania prvých dvoch sú v tomto letáku a ďalšie pošleme tým, ktorí nám pošlú prihlášku. Úlohy 10 a 11 budú obodované počtom bodov od 0 po 9. Za správne riešenie ostatných úloh sa dá získať maximálne 7 bodov. Len v prípade, ak sa niekomu podarí dokázať všeobecnejšie tvrdenie ako v zadaní niektorej z týchto úloh, môže za danú úlohu dostať aj 8 alebo 9 bodov.
Do výsledkovej listiny sa počítajú všetky úlohy. Víťaz dostane hodnotnú vecnú cenu.

Pokyny k riešeniam

- Riešenia posielaj do termínu odoslania série. Ak posielaš riešenia z územia mimo SR, treba to stihnúť do uvedeného zahraničného termínu. Riešenia odoslané po termíne odoslania (rozhodujúca je pečiatka na obálke) spôsobujú značné organizačné problémy a preto nebudú opravované.
- Riešenie každého príkladu píš na samostatný papier formátu A4. Ku každému príkladu uveď svoje meno, triedu, školu a adresu!
- Riešenie každej úlohy riadne zdôvodni. Príklady rieš samostatne. V prípade, že v časti či celom riešení používaš odbornú literatúru, uveď jej názov, autora, vydavateľstvo, rok vydania a stranu. Za opísané riešenie, riešenie využívajúce výpočtovú techniku a riešenie bez zdôvodnenia spravidla nedostaneš veľa bodov.
- Pokiaľ máš dojem, že tvoje riešenie bolo nesprávne obodované, pošli čo najskôr písomnú sťažnosť. Nezabudni k nej priložiť aj originál sporného riešenia.
- Vítané sú aj riešenia v angličtine a češtine a riešenia písané v TEXu.
  Z organizačných dôvodov nebudú opravované riešenia písané v iných jazykoch!

Prednášky

Riešiteľom z okolia Žiliny odporúčame navštíviť Matematický klub (MaK), ktorý má každú poslednú sobotu v mesiaci stretnutie v budove A Žilinskej univerzity (ružová budova na Hurbanovej ulici oproti hlavnej pošte) v čase 9^{00} – 14^{00}. Okrem dvoch zaujímavých prednášok si máte možnosť s kamarátmi aj zašportovať. Bližšie informácie nájdete na stránke `www.sezam.sk/~visni/MaK.html`.
Riešiteľom z okolia Košíc odporúčame navštíviť Klub Mladých Matematikov organizovaný Prírodovedeckou fakultou UPJŠ v Košiciach. Stretnutia sa uskutočňujú každý druhý týždeň vo štvrtok v budove fakulty na Jesennej 5 v čase 16^{00} – 19^{00}. Stretnutia sú určené všetkým stredoškolákom. Okrem zaujímavej matematickej prednášky sa budeme venovať riešeniu príkladov.

Výlety

Pre všetkých prírodychtivých sa pokúsime zorganizovať aj niekoľko výletov. Ich dátumy, aj presné informácie ťa budú čakať na našej internetovej stránke `kms.sturak.sk`.

.... TU ODSTRIHNI !!! ....

Prihláška do zimnej časti KMS 2004/2005 – **poslať spolu s 1. sériou!**

Meno a priezvisko: .... Dátum narodenia: ....
Škola: ....
Trieda .... so zameraním na matematiku: áno—nie
Počet účastí na celoštátnom kole MO: .... , z ktorých bolo .... úspešných.
Adresa domov: ....
Adresa pre poštu (domov – internát – škola): ....
Tel. domov: .... mobil(vlastný): .... e-mail: ....

Pozor! Podmienkou posielania korešpondencie domov je zaslanie 4 obálok A5 s adresami!

Zadania 1. série zimnej časti KMS 2004/2005

Kategória ALFA

Úloha č. 1:
Obdĺžnikový plátok mamutieho mäsa vážil 6 kg. Rozdelili si ho traja praľudia. Najprv obdĺžnik rozrezali na dva kusy. Krátko na to jeden z nich znovu rozrezali na dva kusy. Oba tieto rezy boli rovné. Vznikli takto tri trojuholníky a každý pračlovek si zobral jeden. Jeden z nich mal kus ťažký ako aritmetický priemer zvyšných dvoch. Koľko vážili kusy mäsa?

Úloha č. 2:
Na lúke našli lúčne koníky plánik spoločenskej hry. Plánik bol podobný ako pri hre človeče. Na plániku bola uzavretá cestička s políčkami. Dalo sa teda hopkať dookola. Štyri koníky sa postavili na štyri za sebou idúce políčka. Koníky vedeli skakáť práve o štyri políčka. Koníky sa chvíľu hrali a skákali v smere hodinových ručičiek. Keď skončili, boli opäť na tých istých štyroch políčkach, z ktorých začali. Zistite, ako všelijako mohli byť na konci zoradené ak viete, že na plániku bolo 14 políčok.
Potom sa hrali ich šiesti kamaráti, ktorí vedia skákať o 4, 5, 6, 7, 8 a 9 políčok. Začínali zo 4., 5., 6., 7., 8. a 9. políčka (bolo to šesť za sebou idúcich políčok). Každý začínal z políčka s takým číslom, o koľko políčok vedel skákať. Plánik mal 2004 políčok. Zistite, ako všelijako mohli byť na konci usporiadné, ak skončili hru na tej istej šestici políčok, na ktorej začínali.
Poznámka: Pri tejto hre nezáleží na poradí, v akom koníky skáču. V priebehu hry, nie však na konci, môže stáť na jednom políčku aj viacero koníkov.

Úloha č. 3:
Majme pravidelný štvorboký ihlan so štvorcovou podstavou $ABCD$ a vrcholom V. Označme K stred hrany AB. Bod L je v 1/9 hrany CD, bližšie k bodu C. Bod M je v 1/4 hrany BV, bližšie k bodu V. Bod N je v 1/4 hrany CV, bližšie k bodu V. Porovnajte dĺžku dvoch ciest z K do N:

a) $|KL| + |LN|$

b) $|KM| + |MN|$.

Úloha č. 4:
Na ostrove piadimužíkov zaviedli novú menu. V novej mene platia takéto mince: 1 LI = 10 LILI, 1 LILI = 10 LILILI a 1 LILILI= 10 LILILILI. Zistite, koľko je spôsobov, ako v LI, LILI, LILILI a LILILILI zaplatiť sumu 2004 LILILILI.

Úloha č. 5:
Skupinka troch turistov idúcich rýchlosťou 6 km/h a jeden cyklista idúci rýchlosťou 30 km/h sa vybrali na cestu z dediny A do dediny B, ktoré sú vzdialené 45 km. Neznie to dobre, ale je to tak. Cyklista môže odviezť jedného cestujúceho. Nájdite najkratší čas, za aký celá partia môže doraziť do dediny B a spôsob, ako tento čas dosiahnuť.

Úloha č. 6:
V hoteli je 10 izieb umiestnených na jednej chodbe očíslovaných od 1 po 10 v tomto poradí. Hosť si môže buď objednať jednu izbu na dva po sebe idúce dni, alebo dve susedné izby na jeden deň. Nájomné je 1 dukát na izbu a deň. Turistická sezóna trvá 50 dní. Je známe, že izba číslo 1 nebola obsadená prvý a izba číslo 10 posledný deň sezóny. Dokážte, že majitelia na nájomnom nezískali viac ako 496 dukátov.

Úloha č. 7:
Existuje v rovine 100 priamok takých, že žiadne tri sa nepretínajú v jednom bode a spolu sa pretínajú práve v 2004 bodoch?

Kategória BETA

Úlohy číslo **5, 6, 7** sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

Úloha č. 8:
Nech $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ a pre $n > 2$ nech číslo $a_n = \overline{a_{n-1}a_{n-2}}$ vznikne spojením čísel a_{n-1} a a_{n-2} sprava doľava. Postupnosť ďalej pokračuje takto: $a_3 = \overline{a_2a_1} = 10$, $a_4 = \overline{a_3a_2} = 101$, $a_5 = \overline{a_4a_3} = 10110$. Nájdite všetky n, pre ktoré je a_n deliteľné číslom 11.

Úloha č. 9:
Máme 1001 obdĺžnikov s celočíselnými dĺžkami strán nepresahujúcimi 1000. Dokážte, že z nich vieme vybrať tri (nazvime ich A, B a C) tak, že A sa zmestí do B a B sa zmestí do C.
Poznámka: Ak sú dva obdĺžniky rovnaké, zmestia sa jeden do druhého.

Úloha č. 10:
V piesku na Dunajskej pláži sú napísané čísla 19 a 82. Každý deň prejde okolo nich kajakár Rúža a s číslami urobí jednu z troch možných zmien: obe čísla zvýši o jedna, obe čísla umocní na druhú, alebo jedno z čísel zvýši o jedna a druhé umocní na druhú. Môže sa stať, že jedného dňa budú obe čísla rovnaké?

Úloha č. 11:
Daný je konečný počet štvorcov, pričom súčet ich obsahov je 1/2. Ukážte, že ich je možné umiestniť do štvorca so stranou 1 tak, aby sa neprekrývali.

Kategória GAMA
Úlohy číslo **10, 11** sú rovnaké ako v kategórii **BETA**.

Úloha č. 12:
Daná je postupnosť $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ prirodzených čísel, pričom a_1 nie je deliteľné piatimi a pre každé prirodzené číslo $n \geq 1$ platí $a_{n+1} = a_n + b_n$, kde b_n je číslica na mieste jednotiek čísla a_n. Dokážte, že postupnosť a_n obsahuje nekonečne veľa mocnín dvojky.

Úloha č. 13:
Nájdite prirodzené čísla a, b tak, aby výraz

$$\frac{b}{4}\sqrt{\frac{2a-b}{2a+b}}$$

bol čo najväčším prvočíslom.

Úloha č. 14:
Kružnice k_1 a k_2 sa navzájom dotýkajú zvonka v bode A a súčasne sa obe dotýkajú zvnútra kružnice k v bodoch A_1 a A_2. Bod P je jeden z priesečníkov spoločnej vnútornej dotyčnice k_1 a k_2 s kružnicou k. Nakoniec, body B_i sú druhé priesečníky priamok PA_i s kružnicou k_i $(i = 1, 2)$. Dokážte, že priamka B_1B_2 sa dotýka oboch kružníc k_1, k_2.

Odporúčaná literatúra

Sedláček, J.: Co víme o přirozených číslech, ŠMM 2. Mladá fronta, Praha, 1961
Veselý, F.: O dělitelnosti celých čísel, ŠMM 14. Mladá fronta, Praha, 1966
Hecht, T. – Sklenáriková, Z.: Metódy riešenia matematických úloh
Vrba, A.: Kombinatorika, ŠMM 45. Mladá fronta, Praha, 1980
Herman, J. – Kučera, R. – Šimša, J.: Metody řešení matematických úloh I. Státní pedagogické nakladatelsví, Praha, 1990.
Vilenkin, N. L.: Kombinatorika. SNTL – Mir, Praha – Moskva, 1977.
Vrba, A.: Princip matematické indukce, ŠMM 40. Mladá fronta, Praha, 1977
Larson, L. C.: Metódy riešenia matematických problémov. ALFA, Bratislava, 1990.
Mac Lane, S – Birkhoff, G.: Algebra. ALFA, Bratislava, 1974.
Engel, A.: Problem–solving strategies. Springer-Verlag, New York–Berlin–Heidelberg, 1998.

Termín odoslania riešení: **4. október 2004** (pre zahraničie 1. október 2004)

Naša adresa: KMS, KATČ FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava `kms.sturak.sk`

Zadania 2. série zimnej časti KMS 2004/2005

Kategória ALFA

Úloha č. 1:
Do kružnice s polomerom 1 vpíšeme obdĺžnik so šírkou b a výškou h a rovnoramenný trojuholník so základňou dĺžky b, ktorá je súčasne stranou obdĺžnika. Pre aké hodnoty h majú obdĺžnik a trojuholník rovnaký obsah?

Úloha č. 2:
Zostrojte lichobežník $ABCD$, ak poznáte dĺžky jeho uhlopriečok, dĺžku priečky spájajúcej stredy nerovnobežných protiľahlých strán a jeden z uhlov pri základni.

Úloha č. 3:
Máme danú kružnicu k, priamku p a číslo r. Nájdite všetky kružnice, ktoré sa dotýkajú priamky p a kružnice k a majú polomer veľkosti r. Dotyk kružníc uvažujte vnútorný aj vonkajší. Preveďte diskusiu o počte riešení.

Úloha č. 4:
Máme pravouhlú suradnicovú sústavu (karteziánsku). Body A, B, C, D majú porade súradnice [0, 0], [4, 3], [3, 1], [4, 0]. Dokážte, že veľkosť uhla BAC je rovná veľkosti uhla CAD.

Úloha č. 5:
V rovine leží päť bodov O, A, B, C, D, pričom A, B, C, D sú vrcholmi konvexného štvoruholníka. Pre ich vzdialenosti platí $|OA| \leq |OB| \leq |OC| \leq |OD|$. Dokážte, že pre obsah P štvoruholníka $ACBD$ vždy platí

$$P \leq \frac{1}{2}(|OA| + |OD|)(|OB| + |OC|)\,.$$

Zistite, kedy nastáva rovnosť.
Poznámka: Štvoruholník je konvexný práve vtedy, keď každý jeho vnutorný uhol je menší ako 180°.

Úloha č. 6:
Máme pravouhlý rovnoramenný trojuholník ABC s pravým uhlom pri vrchole C. K nemu je priložený pravouhlý rovnoramenný trojuholník CDE s pravým uhlom pri vrchole C tak, že polpriamka CD je totožná s polpriamkou CB. Označme P, Q, R, S porade stredy úsečiek AB, BD, DE a EA. Dokážte, že štvoruholník $PQRS$ je štvorec.

Úloha č. 7:
Vnútri daného uhla s vrcholom V je daný bod P. Veďte bodom P priamku p tak, aby mal trojuholník AVB minimálny obsah, pričom A, B sú priesečníky priamky p s ramenami uhla.

Kategória BETA

Úlohy číslo **5, 6, 7** sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

Úloha č. 8:
Na strane BC lichobežníka $ABCD$ ($AB \parallel CD$) je zostrojený bod P tak, že $|\sphericalangle APM| = |\sphericalangle DPM|$, kde M je priesečník uhlopriečok AC a BD. Dokážte, že bod B je rovnako vzdialený od priamky DP ako bod C od priamky AP.

Úloha č. 9:
Je daný uhol s vrcholom O a kružnica k, ktorá sa dotýka jeho strán v bodoch A a B. Polpriamka p prechádza bodom A, je rovnobežná s OB a pretína kružnicu k v bode C. Úsečka OC pretína kružnicu k v bode E. Priamky AE a OB sa pretínajú v bode L. Ukážte, že platí $|OL| = |LB|$.

Úloha č. 10:
Ukážte, že v euklidovskej rovine neexistujú 4 body také, že vzdialenosť medzi každými dvomi bodmi je nepárne prirodzené číslo.

Úloha č. 11:
V trojrozmernom priestore je daných n bodov A_1, A_2, …, A_n tak, že každé tri z nich tvoria trojuholník s jedným uhlom väčším ako 120°. Dokážte, že je možné pospájať všetky tieto body do lomenej čiary A_{i_1}, A_{i_2}, …, A_{i_n} tak, aby každé dve susedné hrany lomenej čiary tvorili uhol väčší ako 120°.

Kategória GAMA
Úlohy číslo **10, 11** sú rovnaké ako v kategórii **BETA**.

Úloha č. 12:
Nájdite všetky reálne riešenia $(x_1, \ldots, x_5)$ sústavy nerovníc

$$\begin{aligned}
(x_1^2 - x_3x_5)(x_2^2 - x_3x_5) &\leq 0 \\
(x_2^2 - x_4x_1)(x_3^2 - x_4x_1) &\leq 0 \\
(x_3^2 - x_5x_2)(x_4^2 - x_5x_2) &\leq 0 \\
(x_4^2 - x_1x_3)(x_5^2 - x_1x_3) &\leq 0 \\
(x_5^2 - x_2x_4)(x_1^2 - x_2x_4) &\leq 0\,.
\end{aligned}$$

Úloha č. 13:
Nájdite všetky prvočísla p, q, pre ktoré je zlomok

$$\frac{(5^p - 2^q)(5^q - 2^p)}{pq}$$

celým číslom.

Úloha č. 14:
Kružnicu vpísanú trojuholníku ABC označme k a body jej dotyku so stranami BC a AC postupne D_1 a E_1. Na stranách BC a AC zvolíme body D_2 a E_2 tak, aby $|CD_2| = |BD_1|$ a $|CE_2| = |AE_1|$, bod P je priesečník úsečiek AD_2 a BE_2. Kružnica k pretína úsečku AD_2 v dvoch bodoch, ten bližšie k bodu A označíme Q. Ukážte, že platí $|AQ| = |D_2P|$.

Odporúčaná literatúra

Šedivý, J.: O podobnosti v geometrii, ŠMM 7. Mladá fronta, Praha, 1963
Hecht, T. – Sklenáriková, Z.: Metódy riešenia matematických úloh
Fonód, T. – Maxian, M: Geometrické perličky. Metodické centrum v Bretislave, Bratislava, 1997.
Larson, L. C.: Metódy riešenia matematických problémov. ALFA, Bratislava, 1990.
Coxeter, H. S. M. – Greitzer, S. L.: Geometry revised. Mathematical Association of America, Washington, DC, 1967.
Engel, A.: Problem–solving strategies. Springer-Verlag, New York–Berlin–Heidelberg, 1998.

Termín odoslania riešení: **1. november 2004** (pre zahraničie 29. október 2004)

Naša adresa: KMS, KATČ FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava `kms.sturak.sk`