Bratislavský Korešpondenčný Matematický Seminár

Fakulta Matematiky, Fyziky a Informatiky Univerzity Komenského
Jednota Slovenských Matematikov a Fyzikov
Vzdelávacia nadácia Jana Husa

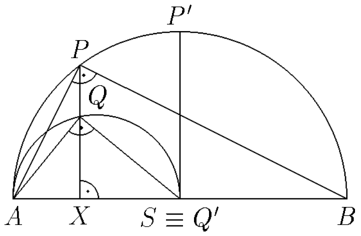
Školský rok 2001/2002 — 2. séria letnej časti

Vzorové riešenia

1. Pozrime sa na celú situáciu z pohľadu bodu Q.

Situácia $Q \equiv A$ môže nastať iba v prípade $P \equiv A$, potom ale priamka PQ nie je definovaná, a preto necháme tento prípad tak.

V prípade $Q \equiv S$ je trojuholník AQP pravouhlý, rovnoramenný s dĺžkou odvesien $|AQ| = |PQ|$. (Na obrázku ide o trojuholník $AQ'P'$.) Použitím *Pytagorovej vety* vypočítame dĺžku prepony $|AQ|^2 = 2|AP|^2$. V tomto prípade teda platí $|AP| : |AQ| = \sqrt{2}$.



obr. 1

Ak bod Q je vnútorným bodom oblúka AS, potom aj P je vnútorným bodom oblúka AB. Nasledujúce úvahy budú platiť bez ohľadu na to, či ležia body P, Q v „hornej" alebo „dolnej" polrovine určenej priamkou AB, prípadne každý v inej.

Označme X pätu kolmice prechádzajúcej týmito bodmi na priamku AB. V takomto prípade existujú trojuholníky APB a AQS. *Talesova veta* nám o nich hovorí, že sú pravouhlé a preto pre ne platí *Euklidova veta o odvesne*, konkrétne $|AP|^2 = |AX| \cdot |AB|$ a $|AQ|^2 = |AX| \cdot |AS|$. Potom ale

$$|AP|^2 = \frac{|AB|}{|AS|}|AQ|^2 = 2|AQ|^2,$$

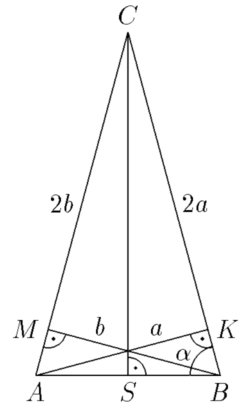
pretože S je stred úsečky AB. Hľadaný pomer je teda v tomto aj v predchádzajúcom prípade $|AP| : |AQ| = \sqrt{2}$.

2a. Označme si dĺžky úsečiek ako na obr. 2, čiže: $|AK| = a$, $|BM| = b$. Potom podľa zadania máme $|AC| = 2b$, $|BC| = 2a$. Vyjadrime si dvojako obsah trojuholníka ABC:

$$\frac{|BC||AK|}{2} = \frac{2a^2}{2} = a^2 = S_{ABC} = \frac{|AC||BM|}{2} = \frac{2b^2}{2} = b^2.$$

Teda $a^2 = b^2$ a keďže sú obe kladné (sú to dĺžky úsečiek), tak $a = b$. Trojuholník ABC je teda rovnoramenný. Preto $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle BAC|$. Trojuholníky AKB a CSB sú pravouhlé, môžeme použiť vzťahy pre sínus a kosínus uhla α. Z trojuholníka AKB máme $\sin\alpha = \frac{|AK|}{|AB|} = \frac{a}{|AB|}$ a z trojuholníka CSB $\cos\alpha = \frac{|SB|}{|BC|} = \frac{\frac{|AB|}{2}}{2a} = \frac{|AB|}{4a}$. Po dosadení z prvej rovnice do druhej dostávame postupne

$$\cos\alpha = \frac{1}{4\sin\alpha} \quad\Longrightarrow\quad 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2} \quad\Longrightarrow\quad \sin(2\alpha) = \frac{1}{2}.$$



obr. 2

Táto rovnica má na intervale $(0°\ ,180°)$ dve riešenia a to $\alpha_1 = 15°$ a $\alpha_2 = 75°$. Keďže súčet uhlov v trojuholníku je $180°$, riešeniami sú trojice $(15°, 15°, 150°)$ a $(75°, 75°, 30°)$.

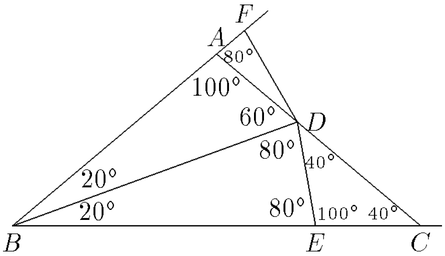
Komentár. Možností, ako riešiť túto úlohu je samozrejme viacero. Prednosťou vyššie uvedeného riešenia je to, že netreba zvlášť rozoberať prípady ostrouhlého a tupouhlého trojuholníka, nakoľko všetky použité vzťahy platia rovnako v oboch prípadoch. Našlo sa dosť riešení, ktoré využívali sínus uhla ACB, pri ktorých bolo odvodenie rovnice iné v prípade tupouhlého trojuholníka.

2b. Podľa zadania $|\sphericalangle BAC| = 100°$ a $|AB| = |AC|$, čiže $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle ACB| = 40°$ a zrejme $|\sphericalangle DBC| = |\sphericalangle DBA| = 20°$. Na polpriamke BC si zvoľme bod E tak, aby $|BD| = |BE|$. Zrejme bod E bude ležať na úsečke BC (skúste si rozmyslieť prečo). Teraz vieme, že $|\sphericalangle BDE| = |\sphericalangle BED| = \frac{180°-20°}{2} = 80°$, $|\sphericalangle BDA| = 60°$ a $|\sphericalangle EDC| = 40°$.

Keďže $|\sphericalangle EDC| = |\sphericalangle ECD|$ nutne $|ED| = |EC|$. Teraz si zvoľme bod F na polpriamke BA tak, aby $|BD| = |BF|$. Tými istými úvahami ako vyššie zistíme, že $|\sphericalangle BDF| = |\sphericalangle BFD| = 80°$, a z toho, že $|\sphericalangle BDA| < |\sphericalangle BDF|$ zistíme, že F leží za bodom A. Všimnime si, že $|\sphericalangle FAD| = 80°$, teda trojuholník DAF je rovnoramenný a platí $|AD| = |DF|$. Body E a F sme si zvolili tak dobre, že $|BE| = |BD| = |BF|$ a $|\sphericalangle EBD| = |\sphericalangle DBF|$, teda trojuholníky BDE a BFD sú zhodné, čiže $|FD| = |DE|$. Teraz zrátame

$$|BD| + |DA| = |BE| + |AD| = |BE| + |FD| = |BE| + |ED| = |BE| + |EC| = |BC|\,.$$

A práve toto sme chceli ukázať.



obr. 3

3a. Predpokladajme najprv, že $|AB| < |BC|$. Priesečník priamky NP s uhlopriečkou BD označme X. Všimnime si, že bod P je obrazom bodu M v osovej súmernosti podľa zvislej osi súmernosti obdĺžnika $ABCD$. Preto je BP osou uhla ABC (rovnako ako je podľa zadania AM osou uhla BAD). Bod N je teda obrazom bodu A v osovej súmernosti podľa BP, a teda $|\sphericalangle PAM| = |\sphericalangle PNM|$. Ešte si uvedomme, že $|\sphericalangle ANB| = 45°$ a kvôli spomenutej symetrii podľa zvislej osi obdĺžnika platí

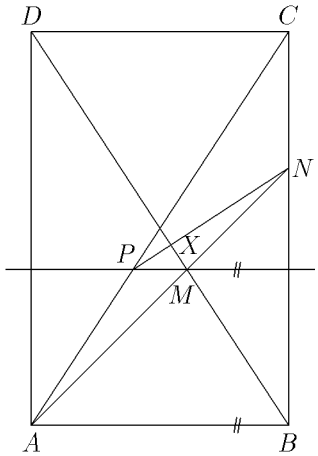
$$|\sphericalangle DBC| = |\sphericalangle DAC| \qquad \text{a} \qquad |\sphericalangle DAC| + |\sphericalangle PAM| = 45°.$$

Odtiaľ už ľahko dostaneme, že

$$\begin{aligned}|\sphericalangle BXN| &= 180° - |\sphericalangle XNM| - |\sphericalangle ANB| - |\sphericalangle XBN| = \\ &= 180° - 45° - (|\sphericalangle PAM| + |\sphericalangle DAC|) = 90°.\end{aligned}$$

V prípade $|AB| > |BC|$ je úvaha analogická, na záver však dostaneme $|\sphericalangle DAC| - |\sphericalangle PAM| = 45°$.

$$\begin{aligned}|\sphericalangle BXN| &= 180° - (|\sphericalangle ANB| - |\sphericalangle XNM|) - |\sphericalangle XBN| = \\ &= 180° - 45° - (|\sphericalangle DAC| - |\sphericalangle PAM|) = 90°.\end{aligned}$$



obr. 4

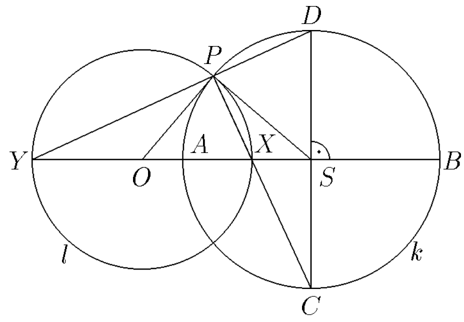
No a napokon v prípade $|AB| = |BC|$ je útvar $ABCD$ štvorec, body M a P splývajú spolu s priesečníkom jeho uhlopriečok do jediného bodu a úloha sa redukuje na triviálne tvrdenie o kolmosti uhlopriečok štvorca.

3b. Bez ujmy na všeobecnosti, nech sa body A, B, C, D nachádzajú na kružnici k v poradí A, C, B, D proti smeru hodinových ručičiek. Keď dokážeme tvrdenie pre toto poradie bodov, bude platiť aj v prípade, keď budú body v poradí A, D, B, C, lebo oba prípady sú osovo súmerné podľa priamky AB. Bod P bude patriť jednému z oblúkov AC, CB, BD, DA (samozrejme okrem samotných bodov A, B, C, D). Stačí nám uvažovať prípad, keď P je bodom oblúka DA. V ostatných prípadoch stačí v nasledujúcom popise navzájom zameniť určité písmená (keď P leží na oblúku AC, stačí vymeniť C a D a súčasne X a Y; keď P je bodom oblúka CB, zameníme C a D, X a Y a súčasne A a B; v poslednom prípade, keď P leží na oblúku BD, zameníme body A a B) a dostaneme korektný dôkaz pre ten-ktorý prípad.

Ekvivalenciu zo zadania dokážeme ukázaním oboch implikácií. Označme si najprv jednotlivé body a kružnice tak, ako je to na obrázku 5. Najprv predpokladajme, že priamky AB a CD sú na seba kolmé a snažme sa ukázať, že sa priamka SP dotýka kružnice opísanej trojuholníku XYP. Keďže CD je priemer kružnice k, uhol CPD je pravý. Uhol YPX je susedný k uhlu CPD, preto je tiež pravý, z čoho podľa *Talesovej vety* vyplýva, že stred O kružnice l opísanej trojuholníku XYP leží v strede úsečky XY, a teda na priamke AB.

Ďalej podľa predpokladu vieme, že aj uhol YSD je pravý, lebo body Y, S tiež ležia na priamke AB. Keď potom označíme $|\sphericalangle PDS| = \beta$, dostávame $|\sphericalangle PCD| = 90° - \beta = |\sphericalangle DYS| = |\sphericalangle PYO|$. Keďže body Y a P ležia na kružnici l, trojuholník PYO je rovnoramenný so základňou PY, teda $|\sphericalangle PYO| = |\sphericalangle YPO|$. Podobne aj trojuholník PCS je rovnoramenný a $|\sphericalangle PCS| = |\sphericalangle SPC|$, z čoho dostávame $|\sphericalangle YPO| = |\sphericalangle SPC|$. Nakoľko je uhol XPY pravý, platí $|\sphericalangle SPO| = |\sphericalangle SPX| + |\sphericalangle XPO| = |\sphericalangle SPC| + 90° - |\sphericalangle YPO| = 90°$. Pretože bod P ako priesečník priamky SP s kružnicou l je jediný možný dotykový bod priamky SP s kružnicou l a priamka SP je v tomto bode kolmá na polomer OP, je aj dotyčnicou ku kružnici l, čo sme chceli ukázať.

Teraz predpokladajme, že priamka SP sa dotýka kružnice l, pričom zrejme P je ich dotykový bod. Aj teraz vieme povedať, že uhol CPD je pravý, lebo CD je priemer kružnice k. Uhol YPX je susedný k uhlu CPD, preto je tiež pravý, a preto stred O kružnice l opísanej trojuholníku XYP leží v strede úsečky XY a teda na priamke AB. Podľa predpokladu je uhol SPO pravý. Pre tento uhol dostávame rovnosť $|\sphericalangle SPO| = |\sphericalangle SPX| + |\sphericalangle XPO| = |\sphericalangle SPX| + 90° - |\sphericalangle YPO|$, ktorej úpravou zistíme, že $|\sphericalangle YPO| = |\sphericalangle SPC|$. Keďže body Y a P ležia na kružnici l, trojuholník PYO je rovnoramenný so základňou PY, teda $|\sphericalangle YPO| = |\sphericalangle PYO| = |\sphericalangle DYS|$, lebo bod O leží na priamke AB. Obdobne, trojuholník PCS je rovnoramenný a $|\sphericalangle SPC| = |\sphericalangle SCP|$. Teda $|\sphericalangle DYS| = |\sphericalangle SCP| = |\sphericalangle DCP| = 90° - |\sphericalangle PDC| = 90° - |\sphericalangle YDS|$, z čoho porovnaním ľavej a pravej strany dostaneme pre trojuholník DYS rovnosť $|\sphericalangle DYS| + |\sphericalangle YDS| = 90°$, a teda že uhol YSD je pravý. A keďže body Y, S ležia na priamke AB, ukázali sme, že priamky AB a CD sú na seba kolmé. Tým je tvrdenie zo zadania dokázané.

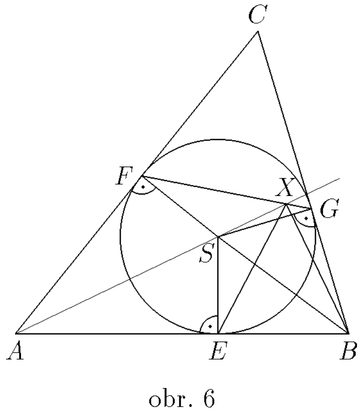


obr. 5

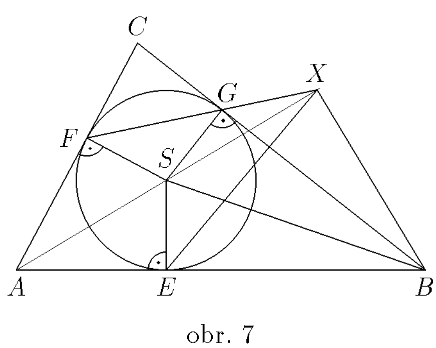
4a. Keďže body A_1, B_1, C_1 sú pätami kolmíc z bodu P na výšky trojuholníka ABC, tak potom body A_1, B_1, C_1, P, V, kde V je ortocentrum trojuholníka ABC, ležia na *Talesovej kružnici* nad priemerom PV. Použitím vety o obvodovom uhle zistíme, že uhly v trojuholníku $A_1B_1C_1$ sú zhodné s uhlami v trojuhoníku ABC (skúste si sami dokázať). A teda trojuhoník $A_1B_1C_1$ je podobný s trojuholníkom ABC. Aby bol obsah trojuholníka $A_1B_1C_1$ maximálny, musí byť koeficient podobnosti čo najväčší, a teda aj polomer kružnice opísanej trojuholníku $A_1B_1C_1$ musí byť najväčší možný. A to je vtedy, keď je $|VP|$ maximálne (lebo VP je priemer kružnice). Také P leží na priesečníku kružnice opísanej trojuholníku ABC s polpriamkou VS, kde S je stred kružnice opísanej $\triangle ABC$. To ukážeme jednoducho pomocou trojuholníkovej nerovnosti. Nech P' je ľubovoľný bod kružnice okrem P, potom $|VP'| < |VS| + |SP'| = |VS| + |SP| = |VP|$. Takže máme hľadaný bod P, ak bod V je rôzny od bodu S, čiže ak trojuholník ABC nie je rovnostranný. Ak je, tak potom bod V splýva s bodom S a pre každý bod P je obsah trojuholníka $A_1B_1C_1$ rovnaký. A teda tu môžeme zvoliť ľubovoľný bod kružnice.

4b. Stred vpísanej kružnice nazvime S, bod jej dotyku so stranou AB nazvime E a bod, ktorý je prienikom priamky FG s osou uhla BAC, nazvime X. Trojuholníky SFX a SEX sú osovo súmerné a preto $|\sphericalangle SFX| = |\sphericalangle SEX|$. Trojuholník FGS je rovnoramenný, preto platí aj $|\sphericalangle SGF| = |\sphericalangle SFG| = |\sphericalangle SEX|$. Ideme ukázať, že body S, E, X a G ležia na jednej kružnici. Tento dôkaz si rozdelíme na tri prípady.

1. Bod X leží vnútri trojuholníka ABC. Vtedy $|\sphericalangle SGX| = |\sphericalangle SGF| = |\sphericalangle SEX|$ a z vety o obvodovom uhle dostávame, že tieto body ležia na kružnici.
2. Bod X leží na strane BC. Vtedy je bod X zhodný s bodom G a body S, E, G zjavne na nejakej kružnici ležia.
3. Bod X leží mimo trojuholníka ABC. Vtedy $|\sphericalangle SEX| = |\sphericalangle SGF| = 180° - |\sphericalangle SGX|$ a z vety o obvodovom uhle opäť dostávame, že tieto body ležia na kružnici (resp. vidíme, že štvoruholník $SEXG$ je tetivový).



obr. 6



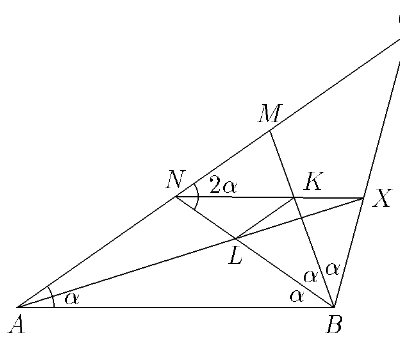
obr. 7

Vieme teda, že bod X leží na kružnici opísanej trojuholníku SEG. Štvoruholník $SEBG$ je tetivový, preto aj bod B leží na kružnici opísanej trojuholníku SEG. Čiže všetkých týchto päť bodov leží na jednej kružnici. Z vety o obvodovom uhle opäť dostávame $|\sphericalangle SXB| = |\sphericalangle SGB| = 90°$, čo znamená, že práve bod X je pätou kolmice z bodu B na os uhla BAC. A tým SEX, teda vlastne QED (keď si pozriete ako blízko sú na klávesnici Q so S a D s X uveríte, že to bol naozaj len preklep ...).

5a. Označme S stred kružnice k vpísanej trojuholníku ABC a V priesečník výšok trojuholníka ABC (vieme, že sa všetky tri výšky pretínajú v jednom bode). Ukážeme, že keď výšky vytínajú na kružnici vpísanej trojuholníku ABC tetivy rovnakej dĺžky, potom musí byť trojuholník rovnostranný.

Môžeme rozlišovať dva prípady: Trojuholník ABC je ostrouhlý; trojuholník ABC nie je ostrouhlý. Pozrime sa najprv na druhý prípad. V takomto trojuholníku existuje výška, ktorá nepretína k, v krajnom prípade sa jej dotýka, teda dĺžka tetivy je nulová. Existuje však aj výška, ktorá ju pretína a vytína tak tetivu nenulovej dĺžky. Neplatí teda predpoklad o rovnosti dĺžok tetív. Zoberme si teda ostrouhlý trojuholník. Máme tri priamky, prechádzajúce bodom V, ktoré vytínajú rovnako dlhé (nenulové) tetivy na k. Aká môže byť poloha bodu V? Ak majú naše tetivy rovnakú dĺžku, potom musia byť vzdialenosti výšok od stredu vpísanej kružnice rovnaké (myslia sa tým vzdialenosti bodu S od priamok, na ktorých ležia výšky). Označme si túto vzdialenosť r. Ak $r > 0$, vytvoríme kružnicu l so stredom v bode S a polomerom r. Výšky sú dotyčnicami l a prechádzajú tým istým bodom V. Ale vieme, že kružnica má maximálne dve dotyčnice vedené z jedného bodu. Musia sa nám teda dve dotyčnice zhodovať. Ale výšky trojuholníka nemôžu byť totožné. Nakoniec sa pozrime na prípad $r = 0$. V tomto prípade $V = S$ a tetivy majú dĺžku 2ρ (kde ρ je polomer vpísanej kružnice). Ľahko sa ukáže, že trojuholník musí byť rovnostranný. V rovnostrannom trojuholníku je navyše splnený predpoklad a konečne môžeme tvrdiť, že zo všetkých trojuholníkov jedine v rovnostrannom trojuholníku vytínajú výšky na vpísanej kružnici rovnako dlhé tetivy.

5b. Nebudeme sa zaoberať okrajovým prípadom, keď sú body M a N totožné s vrcholmi trojuholníka ABC, nakoľko prípustnosť tejto situácie (v ktorej, mimochodom, tvrdenie neplatí) je závislá od interpretácie slov „na strane AC."



obr. 8

Keď označíme $\alpha = |\sphericalangle BAC|$, zrejme $|\sphericalangle CBN| = |\sphericalangle MBN| = |\sphericalangle NBA| = \alpha$ a keď vezmeme do úvahy, že súčet veľkostí vnútorných uhlov v trojuholníku je 180°, ľahko dopočítame aj uhly $|\sphericalangle ANB| = 180° - 2\alpha$ a $|\sphericalangle CNB| = 2\alpha = |\sphericalangle NBC|$ (pozri obrázok). Všimneme si teda dva rovnoramenné trojuholníky ABN a BNC, v ktorých $|AN| = |BN|$ a $|BC| = |NC|$.

Menelaova veta pre trojuholník CNB nám pre body A, L a X ležiace na jednej priamke dáva

$$\frac{|CA|}{|AN|}\frac{|NL|}{|LB|}\frac{|BX|}{|XC|} = 1$$

a z *Menelaovej vety* pre trojuholník CMB a body N, K a X, ktoré tiež ležia na jednej priamke, dostaneme

$$\frac{|CN|}{|NM|}\frac{|MK|}{|KB|}\frac{|BX|}{|XC|} = 1\,.$$

Vydelením týchto rovníc dostaneme

$$\frac{|CA|}{|AN|}\frac{|NL|}{|LB|}\frac{|NM|}{|CN|}\frac{|KB|}{|MK|} = 1$$

a po úprave

$$\frac{|CA|}{|AN|}\frac{|NL|}{|LB|} = \frac{|CN|}{|NM|}\frac{|MK|}{|KB|}\,.$$

Keď bude platiť $\frac{|NL|}{|LB|} = \frac{|MK|}{|KB|}$, body L a K budú deliť porade úsečky NB a MB v rovnakom pomere, je teda zrejmé, že trojuholníky BMN a BKL budú rovnoľahlé, a teda $\overleftrightarrow{KL} \parallel \overleftrightarrow{MN} \equiv \overleftrightarrow{AC}$. Stačí nám teda dokázať

$$\frac{|CA|}{|AN|} = \frac{|CN|}{|NM|}\,.$$

Úpravou ľavej, resp. pravej, strany použitím už spomínaných vzťahov $|AN| = |BN|$ a $|CN| = |CB|$ dostaneme

$$\frac{|CA|}{|AN|} = \frac{|CN| + |NA|}{|AN|} = \frac{|CN|}{|AN|} + 1 = \frac{|CB|}{|BN|} + 1\,,$$

resp.

$$\frac{|CN|}{|NM|} = \frac{|CM| + |MN|}{|NM|} = \frac{|CM|}{|NM|} + 1\,,$$

a tak je dokazovaná rovnica ekvivalentná s rovnicou

$$\frac{|CB|}{|BN|} = \frac{|CM|}{|NM|}\,.$$

Tá je však splnená, lebo v ľubovoľnom trojuholníku delí os uhla protiľahlú stranu v pomere priľahlých a použitím tejto vety pre trojuholník CNB a os BM uhla NBC dostávame práve poslednú rovnicu. Tým je tvrdenie dokázané.

Iné riešenie: Ukážme si ešte riešenie, ktoré nepoužíva *Menelaovu vetu*. Tá totiž nie je medzi stredoškolákmi príliš známa.

Použitím *sínusových viet* v trojuholníkoch ALN a BLX (vieme, že $|\sphericalangle ALN| = |\sphericalangle BLX|$) dostaneme

$$\frac{|AL|}{|AN|} = \frac{\sin|\sphericalangle ANL|}{\sin|\sphericalangle ALN|} = \frac{\sin(180° - 2\alpha)}{\sin|\sphericalangle ALN|} = \frac{\sin(2\alpha)}{\sin|\sphericalangle BLX|} = \frac{\sin|\sphericalangle LBX|}{\sin|\sphericalangle BLX|} = \frac{|LX|}{|BX|}\,,$$

čiže po upravení a použití $|AN| = |BN|$ dostaneme

$$\frac{|LX|}{|AL|} = \frac{|BX|}{|AN|} = \frac{|BX|}{|BN|}\,.$$

V trojuholníku BXN však delí os BK uhla XBN stranu XN v pomere $|KX| : |KN| = |BX| : |BN|$. To však znamená, že

$$\frac{|LX|}{|LA|} = \frac{|KX|}{|KN|}\,,$$

body L a K teda delia porade úsečky AX a NX v rovnakom pomere. Potom sú však trojuholníky XKL a XNA rovnoľahlé a teda $\overleftrightarrow{KL} \parallel \overleftrightarrow{NA} \equiv \overleftrightarrow{AC}$. Tým je tvrdenie dokázané.

Túto sériu opravovali: Šaňo Erdélyi a Tinka Gancárová (1), Janka Szolgayová a Kika Černeková (2a), Pišta Gyürki (2b) Buggo Steskal a Paľo Jurča (3a), Poko Pokorný (3b), Šesťo Šesták (4a), Foto Potočný (4b), Katka Boďová (5a), Vlado Marko (5b).