Bratislavský Korešpondenčný Matematický Seminár

Fakulta Matematiky, Fyziky a Informatiky Univerzity Komenského
Jednota Slovenských Matematikov a Fyzikov
Vzdelávacia nadácia Jana Husa

Školský rok 2001/2002

Milé študentky, milí študenti!

Vítame Vás v letnej časti 23. ročníka Bratislavského korešpondenčného matematického seminára (BKMS). Radi by sme týmto listom oslovili hlavne tých, ktorí sa do nášho seminára zapájajú po prvý raz.

BKMS je matematická súťaž stredoškolákov rozdelená na dve samostatné, od seba nezávislé kolá, z ktorých každé pozostáva z troch sérii. Zimná časť prebieha od septembra do decembra a letná od februára do mája. Po každej časti je najlepších 10 riešiteľov odmenených zaujímavými knižkami z oblasti matematiky alebo jej aplikácií. Každá časť je navyše zavŕšená sústredením pre najlepších riešiteľov. Na sústredenie budú pozvaní tí z Vás, ktorí skončia po tretej sérii **do 25. miesta** a ďalší, ktorých vyberú organizátori seminára. Títo budú vybraní spomedzi mladších riešiteľov a tých, ktorí ešte neboli na sústredenie pozvaní. V žiadnom prípade však medzi nimi nebudú tí, ktorým boli oprávnene strhnuté body za opisovanie.

V seminári sa stretnete s netradičnými príkladmi, ktoré často presahujú rámec učebných osnov gymnázii, a preto Vás nútia aj k samostatnému štúdiu literatúry, ktorá býva k jednotlivým sériam odporúčaná. Pri riešení zaujímavých príkladov sa budete môcť zoznámiť s celou plejádou trikov, využívaných aj v príkladoch matematickej olympiády. Riešenia príkladov píšte spôsobom obvyklým v MO, t.j. jednotlivé kroky svojho riešenia riadne zdôvodnite. Nakoľko na seminár máte dostatok času, dbajte aj na estetickú stránku riešenia.

Pre mladších riešiteľov organizujeme k jednotlivým sériam seminára prednášky. Vám mladším nahradia samostatné štúdium literatúry, s ktorým nemusíte mať také skúsenosti ako starší študenti špecializovaných matematických škôl. Preto na tieto prednášky pozývame predovšetkým študentov 1. a 2. ročníkov a študentov nematematických škôl.

Pokiaľ máte záujem v tomto polroku riešiť BKMS, pošlite nám **spolu s 1. sériou** vyplnenú priloženú **prihlášku**. Ak chcete, aby Vám korešpondencia bola zasielaná domov, vyznačte to v prihláške a spolu s ňou nám pošlite aj štyri nalepovacie štítky alebo stredne veľké obálky (C5) s adresami (papieriky s napísanými adresami nestačia!). Pokiaľ štítky či obálky nedostaneme, budú Vám opravené riešenia posielané do školy. Zadania tretej série (prvú a druhú máte práve v rukách) dostanete spolu s opravenými riešeniami prvej série. Pokiaľ ich tam náhodou nenájdete, okamžite kontaktujte niekoho z nižšieuvedených organizátorov seminára.

Aktuálne informácie o BKMS ako aj fotky z predchádzajúcich sústredení a výletov nájdete na internetovej adrese http://www.bkms.sk prípadne http://turing.fmph.uniba.sk/www/bkms. Prípadné ďalšie otázky radi zodpovieme na týchto kontaktných adresách:

výlety – 1steskal@st.fmph.uniba.sk
www – 9olejnik@st.fmph.uniba.sk
príklady – 8foldes@st.fmph.uniba.sk
všeobecne – bkms@pobox.sk

Podrobnejšie pravidlá sú rozpísané na poslednej strane týchto zadaní. Pozorne si ich prečítajte, nakoľko sme v nich posledne urobili drobné zmeny.

POZOR!!! SÚŤAŽ!!! POZOR!!! SÚŤAŽ!!! POZOR!!! SÚŤAŽ!!!

Už je to tu! Tento polrok budete mať jedinečnú príležitosť zmerať si sily v riešení matematických príkladov a popri tom sa zapojiť do tipovacej súťaže, ktorá preverí vašu psychickú odolnosť, takticko–strategické myslenie ale predovšetkým schponosť odhadnúť vlastné sily. Pravidlá súťaže nájdete na zadnej strane tohoto letáku.

POZOR!!! SÚŤAŽ!!! POZOR!!! SÚŤAŽ!!! POZOR!!! SÚŤAŽ!!!

Všetkým účastníkom prajeme veľa chuti do práce, tešíme sa na Vaše riešenia a prípadné osobné stretnutia

Mgr. Martin Irman	RNDr. Jaroslav Guričan, Csc.		Mgr. Eugen Kováč
Alexander Erdélyi	Slavo Špakula	Vlado Marko	Juraj Feldo Földes
Tinka Gancárová	Feri Kardoš	Dávidko Pál	Foto Potočný
Kika Černeková	Ďuri Olejník	Katka Boďová	Paľo Jurča
Janka Szolgayová	Ľuboš Šesták	Tomáš Jurík	Hanka Tichá
Marián Rúža Potočný	Pišta Gyürki	Ľuboš Steskal	Mišo Pokorný

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TeX

Bratislavský Korešpondenčný Matematický Seminár

Školský rok 2001/2002 — 1. séria letnej časti

Pikošky zo života vedúcich

1. Feldo bol cez leto v USA a jeho spolužiaci Slavo a Feri ho požiadali, aby im priniesol poldoláre. Slavovi stačil jeden, ale Feri ich chcel čo najviac. Feldo ich nakoniec zohnal päť. Vie, že napriek navlas rovnakému vzhľadu sú len tri z nich pravé a dva falošné. Falošné mince majú rovnakú hmotnosť, ale Feldo netuší, či väčšiu alebo menšiu ako pravé (pravé mince vážia všetky rovnako). Slavo sa v peniazoch trochu vyzná a ak by dostal falošnú mincu, mohol by sa nahnevať. Feri o minciach nič nevie a nerozoznal by pravú mincu od čokoládovej. Poraďte Feldovi, ako môže nájsť na čo najmenej vážení na dvojramenných váhach aspoň jednu pravú mincu.

2a. Poko, Janka a Buggo sa rozhodli, že vysadia niekoľko, avšak najviac 16 ihličnatých stromčekov na miestnom rúbanisku. Rúbanisko má tvar štvorca s rozmermi 4×4 metre a je rozdelené na 16 rovnakých štvorcov. Stromčeky sa zvyknú sadiť do stredov týchto štvorcov. Každý rok pred Vianocami príde na rúbanisko banda bezcitných barbarov (ďalej len BBB) a vyberie si dva stĺpce a dva riadky, v ktorých vyrúbe všetky stromčeky. Určte najmenší počet stromčekov, pri ktorom si naši mladí lesníci môžu byť istí, že po Vianociach ostane na rúbanisku aspoň jeden živý stromček.

2b. Paľo, Katka a Šesťo sú starší, skúsenejší a tak sa po porade so študovaným lesníkom Ferim nebáli pustiť do odvážnejšieho projektu. Rozhodli sa, podobným spôsobom ako ich mladší kolegovia v predchádzajúcom príklade, vysadiť $(2\,002)^2$ stromčekov na rúbanisku $2\,002 \times 2\,002$ metrov. Medzi vysadenými stromčekmi budú jedličky a borovičky. Aj tu bude pred Vianocami úradovať BBB a vyrúbe najskôr všetky jedličky, ktoré sú v riadku s nejakou borovičkou a potom vyrúbe všetky borovičky, ktoré sú v stĺpci s nejakou jedličkou. Môžu naši starší a skúsenejší lesníci vysadiť stromčeky tak, aby po Vianociach ostalo aspoň $1\,002\,001$ stromčekov z každého druhu?

3a. Tine sa občas stane, že príde na rande a dotyčný mešká. Vtedy si dlhú chvíľu začne krátiť hovorením za sebou idúcich členov aritmetickej postupnosti prirodzených čísel a skončí až v momente príchodu dotyčného. Tina je počas čakania nahnevaná, ale keď povie druhú mocninu prirodzeného čísla, na chvíľu sa usmeje. Raz sa stalo, že dotyčný neprišiel. Môže nastať taká situácia, že by sa Tina párkrát (aspoň raz) usmiala, ale od istého momentu by sa už vôbec neusmievala?

3b. Aj Šaňovi sa raz stalo, že prišiel na rande a dotyčná meškala. Vtedy si dlhú chvíľu začal krátiť tým, že zobral číslo $2\,002$ a sčítal desiate mocniny jeho cifier. To isté zopakoval s číslom, ktoré mu vzniklo. Túto operáciu opakoval stále dookola. Skutočnosť, že dostáva stále nové a nové čísla ho fascinovala a na tvári sa mu okamžite objavil spokojný úsmev. Ba čo viac, táto hra sa mu páčila natoľko, že ho nedokázal zastaviť ani príchod dotyčnej. Šaňo si povedal, že prestane len v prípade, ak dostane číslo, ktoré už raz vypočítal. Skončí sa niekedy táto jeho podivná hra?

4a. Športový fanatik Rúža jazdí na kajaku aj v zime, keď je hladina zátoky pokrytá ľadovými kryhami veľkosti 1×1 meter. Aby po nich mohol jazdiť, musí ich dostať na jednu úroveň. Na Silvestra bolo na zátoke $(2\,002)^2$ krýh usporiadaných do štvorca $2\,002 \times 2\,002$ metrov. Jeden centimeter nad hladinu vody vytŕčalo $2\,001$ krýh a zvyšné mali svoj povrch zarovno s hladinou vody. Rúža nôže zatlačiť ľubovoľnú kryhu presne o centimeter hlbšie, ale spôsobí tým tlak, ktorý vytlačí všetky ostatné kryhy v tom istom riadku a stĺpci presne o centimeter vyššie. Tento postup môže viackrát zopakovať. Mohol Rúža jazdiť na kajaku aj na Silvestra?

4b. Ďuri, Šaňo, Tino a Dávidko si naplánovali cyklistickú túru a na nej n rýchlostných prémií. Ďuri jazdí len okruhy, preto prvá a n–tá prémia sú na tom istom mieste a to na Lúke. Dávidko má zasa rád stereotyp, preto je trasa medzi každými dvoma po sebe idúcimi prémiami rovnako dlhá, bez zákrut (priamočiara) a bez prevýšení. Tino si túru zmapoval pomocou GPS a vytlačil trasu na štvorčekový papier. Šaňo si pri podrobnejšom prieskume mapy všimol, že každá prémia sa nachádza v mrežovom bode. Môže mať táto túra párny počet prémií?

5a. Kika sa pokúša od Felda zistiť počet jeho bývalých frajeriek, ktorých bolo n. Feldo jej prezradil len to, že ich bolo najviac 100. Na veľké naliehanie, jej dovolil zvoliť si celé čísla a a b a spýtať sa otázku: „Aký je najväčší spoločný deliteľ čísel $n + a$ a b?". Zistite, či Kika dokáže určiť hodnotu n pomocou siedmich otázok.

5b. Pišta povedal Fotovi päť rôznych čísel a vyzval ho, aby ich usporiadal podľa veľkosti. To by nebol žiaden problém, nebyť faktu, že Pišta tie čísla povedal po maďarsky. Keďže Foto nerozumie po maďarsky ani slovo, Pišta mu dovolil vybrať si tri z vyslovených čísel a spýtať sa otázku: „Je pravda, že $a < b < c$?" Pišta pravdivo odpovie áno, alebo nie. Zistite, či Foto dokáže usporiadať týchto päť čísel pomocou deviatich otázok.

TERMÍN ukončenia tejto série je 11. marca 2002.

POZOR! Riešenia odoslané, resp. osobne doručené po tomto termíne nebudú opravované.

Bratislavský Korešpondenčný Matematický Seminár

Školský rok 2001/2002 — 2. séria letnej časti

Priečky v trojuholníku

1. Označme S stred úsečky AB. Nech P resp. Q je ľubovoľný bod kružnice zostrojenej nad priemerom AB resp. AS taký, že priamka PQ je kolmá na priamku AB. Aký je pomer dĺžok úsečiek AP a AQ?

2a. Je daný trojuholník ABC. Označme K a M postupne päty výšok na strany BC a AC. Nájdite veľkosti uhlov trojuholníka ABC, ak platí $|BC| = 2 \cdot |AK|$ a $|AC| = 2 \cdot |BM|$.

2b. V trojuholníku ABC platí $|AB| = |AC|$ a $|\sphericalangle BAC| = 100°$. Označme D priesečník osi uhla ABC a strany AC. Dokážte, že $|BC| = |BD| + |DA|$.

3a. V obdĺžniku $ABCD$ pretína os uhla BAD uhlopriečku BD v bode M a stranu BC v bode N. Priamka rovnobežná so stranou AB a prechádzajúca bodom M pretína uhlopriečku AC v bode P. Dokážte, že priamky BD a NP sú navzájom kolmé.

3b. Nech AB a CD sú dva rôzne priemery kružnice k so stredom S. Na kružnici k zvoľme bod P rôzny od bodov A, B, C, D taký, že priamky CP a DP pretínajú priamku AB postupne v bodoch X a Y. Dokážte, že priamka AB je kolmá na priamku CD práve vtedy, keď sa priamka SP dotýka kružnice opísanej trojuholníku XYP.

4a. Na kružnici opísanej trojuholníku ABC leží bod P. Označme A_1, B_1 a C_1 päty kolmíc spustených z bodu P na výšky trojuholníka ABC. Nájdite polohu bodu P pri ktorej je obsah trojuholníka $A_1B_1C_1$ maximálny.

4b. Kružnica vpísaná trojuholníku ABC sa dotýka strany AC v bode F a strany BC v bode G. Dokážte, že päta kolmice z bodu B na os uhla BAC leží na priamke FG.

5a. O trojuholníku vieme, že jeho výšky vytínajú na jemu vpísanej kružnici tetivy rovnakej dĺžky. Rozhodnite, či je trojuholník rovnostranný a svoje tvrdenie zdôvodnite.

5b. V trojuholníku ABC platí $|\sphericalangle ABC| = 3 \cdot |\sphericalangle CAB|$. Na strane AC zvoľme body M a N tak, aby platilo $|\sphericalangle CBM| = |\sphericalangle MBN| = |\sphericalangle NBA|$. Nech X je ľubovoľný bod na strane BC. Označme L priesečník priamok AX a BN a K priesečník priamok NX a BM. Dokážte, že priamky KL a AC sú rovnobežné.

TERMÍN ukončenia tejto série je 8. apríla.

POZOR! Riešenia odoslané, resp. osobne doručené po tomto termíne nebudú opravované.

Vaše riešenia posielajte na adresu:

BKMS, KATČ, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Odporúčaná literatúra

L.C. Larson: Metódy riešenia matematických problémov
T. Hecht, Z. Sklenáriková: Metódy riešenia matematických úloh
J. Földes a kolektív: BKMS 23. ročník, zimná časť
L. Bukovský, I. Kulvánek: Dirichletov princíp, ŠMM 25
R. Výborný: Matematická indukce, ŠMM 6
A. Vrba: Princip matematické indukce, ŠMM 40
J. Šedivý: Shodná zobrazení v konstruktivních úlohách, ŠMM 3
S. Horák: Kružnice, ŠMM 16
J. Šedivý: Shodnost a podobnost v konstrukčních úlohách, ŠMM 46
J. Švrček: Geometrie trojúhelníka

Prednášky k 1. a 2. sérii

Prednášky budú v pondelok **25. 2.**, resp. **25. 3. o 16^{00}** hod. v matematickom pavilóne FMFI UK v Mlynskej doline (autobusy č. 31, 39 – zastávka pri budove televízie, autobus č. 32, 29 a električky č. 1, 4, 5, 9, 12 – zastávka pri internáte Družba). Stretneme sa pri vrátnici matematického pavilónu o 15^{55}. Všetkých záujemcov pozývame a tešíme sa na stretnutie s vami.

Pravidlá

- Riešenie každého príkladu píšte na samostatný papier formátu A4. Ku každému príkladu uveďte svoje meno, triedu, školu a adresu!
- Riešenie každej úlohy riadne zdôvodnite. Príklady riešte samostatne. V prípade, že v časti či celom riešení používate odbornú literatúru, uveďte jej názov, autora, vydavateľstvo, rok vydania a stranu. Za opísané riešenie, riešenie využívajúce výpočtovú techniku a riešenie bez zdôvodnenia spravidla nedostanete veľa bodov.
- Pokiaľ máte dojem, že vaše riešenie bolo nesprávne obodované, môžete do jedného týždňa poslať písomnú sťažnosť. Nezabudnite k nej priložiť aj originál sporného riešenia.
- Príklady 2b a 3b musia riešiť tí študenti matematických tried GAMČA, GVOZA, G Tajovského BB, G Párovská NT, G Poštová KE, G Alejová KE a všetkých českých gymnázií so zameraním na matematiku, ktorí dosiahli aspoň v jednom konečnom poradí najmenej 45 bodov. Ostatným sa bude započítavať lepší z príkladov 2a, 2b (resp. 3a, 3b).
- Príklady 4b a 5b musia riešiť tí tretiaci a štvrtáci, ktorí aspoň dvakrát získali aspoň 45 bodov, **alebo sa najmenej dvakrát zúčastnili sústredenia BKMS**. Ostatným študentom sa bude započítavať lepší z príkladov 4a, 4b (resp. 5a, 5b).
- Limit na získanie 5-bodovej prémie je pre študentov k-teho ročníka 14+2k bodov.
- Naďalej sú vítané riešenia v angličtine a češtine a riešenia písané v TEXu.

Tipovacia Súťaž

Veľmi nás zaujíma, ako ste schopní odhadnúť kvalitu svojich riešení a preto sme pre vás v tejto časti seminára pripravili tipovaciu súťaž. S každou sériou nám na **samostatnom papieri** pošlite odhad počtu vlastných bodov, ktoré získate za jednotlivé poslané príklady. Áno, je dôležité aby ste to poslali na samostatnom papieri. Rozhodne však netipujte zisky menšie ako 1.5 boda. Spolu so vzorovými riešeniami každej série zverejníme aj priebežné výsledky tejto súťaže. Po tretej serii zverejníme záverečné poradie súťaže a troch najlepších odmeníme veľkou sladkou odmenou a poukážkou na získanie 1.5, 3, resp. 4.5 boda za ľubovoľný príklad v zimnej časti nasledujúceho ročníka BKMS.

Veľký Aprílový Výlet

Aj tento rok sa v apríli uskutoční už tradičný **Veľký Aprílový Výlet BKMS**. Bude to jedinečná príležitosť na získanie nových, prípadne stretnutie starých, kamarátov či už z radov riešiteľov alebo organizátorov seminára. Určite si teda nič iné neplánujte na **sobotu 13. apríla**. A to je zároveň všetko, čo vám zatiaľ o tejto akcii prezradíme. Podrobnejšie informácie obdržíte so zadaniami 3. série.

.... TU ODSTRIHNÚŤ!!! ....

PRIHLÁŠKA DO LETNEJ ČASTI BKMS 2001/2002 – **posielať spolu s 1.sériou!**

Meno a priezvisko: ....
Škola: .... Trieda ....
Adresa domov: ....
Adresa pre poštu (domov – internát – škola): ....
Dátum narodenia: ....
Telefón: .... e-mail: ....

Pozor! Podmienkou posielania korešpondencie domov je zaslanie štítkov alebo obálok s adresami!