Bratislavský Korešpondenčný Matematický Seminár

Fakulta Matematiky, Fyziky a Informatiky Univerzity Komenského
Jednota Slovenských Matematikov a Fyzikov
Centrum voľného času – IUVENTA
gratex international
making it simple

Školský rok 2000/2001

Milé študentky, milí študenti!

Vítame Vás v letnej časti XXII. ročníka Bratislavského korešpondenčného matematického seminára (BKMS). Radi by sme týmto listom oslovili hlavne tých, ktorí sa do nášho seminára zapájajú po prvý raz.

BKMS je matematická súťaž stredoškolákov rozdelená na dve samostatné, od seba nezávislé kolá, z ktorých každé pozostáva z troch sérii. Zimná časť prebieha od septembra do decembra a letná od februára do mája. Každá časť je zavŕšená sústredením pre najlepších riešiteľov. Na sústredenie budú pozvaní tí z Vás, ktorí skončia po tretej sérii **do 25. miesta** a ďalší jedenásti, ktorých vyberú vedúci seminára. Výhodu pritom budú mať riešitelia, ktorí na sústredení ešte neboli.

V seminári sa stretnete s netradičnými príkladmi, ktoré často presahujú rámec učebných osnov gymnázii, a preto Vás nútia aj k samostatnému štúdiu literatúry, ktorá býva k jednotlivým sériam odporúčaná. Pri riešení zaujímavých príkladov sa budete môcť zoznámiť s celou plejádou trikov, využívaných aj v príkladoch MO.

Pre mladších riešiteľov organizujeme k jednotlivým sériam seminára prednášky. Vám mladším nahradia samostatné štúdium literatúry, s ktorým nemusíte mať také skúsenosti ako starší študenti špecializovaných matematických škôl. Preto na tieto prednášky pozývame predovšetkým študentov 1. a 2. ročníkov a študentov nematematických škôl.

Pokiaľ máte záujem v tomto polroku riešiť BKMS, pošlite nám **spolu s 1. sériou** vyplnenú priloženú **prihlášku**. Ak chcete, aby Vám korešpondencia bola zasielaná domov, vyznačte to v prihláške a spolu s ňou nám pošlite aj päť nalepovacích štítkov alebo stredne veľkých obálok (C5) s adresami (papieriky s napísanými adresami nestačia!). Pokiaľ štítky či obálky nedostaneme, budú Vám opravené riešenia posielané do školy.

POZOR!!! NOVÉ A INÉ DÔLEŽITÉ PRAVIDLÁ!!! POZOR!!!

→ Na sústredenie bude priamo pozvaných iba prvých 25 riešiteľov. Zvyšní jedenásti budú doplnení vedúcimi seminára a pôjde skoro výlučne o študentov, ktorí na sústredení ešte neboli. Určite však nebudú pozvaní riešitelia, ktorým boli odôvodnene strhnuté body za opisovanie.

→ Riešenia príkladov píšte spôsobom obvyklým v matematickej olympiáde, t.j. jednotlivé kroky svojho riešenia riadne zdôvodnite. Nakoľko na seminár máte dostatok času, dbajte aj na estetickú stránku riešenia.

→ Zadania tretej série (prvú a druhú máte práve v rukách) dostanete spolu s opravenými riešeniami prvej série. Pokiaľ ich tam náhodou nenájdete, okamžite kontaktujte niekoho z nižšieuvedených vedúcich seminára.

→ Aktuálne informácie o BKMS ako aj fotky z predchádzajúcich sústredení a výletov nájdete na internetovej adrese http://www.bkms.sk prípadne http://turing.fmph.uniba.sk/www/bkms. Prípadné ďalšie otázky radi zodpovieme na týchto kontaktných adresách:

výlety – 6irman@st.fmph.uniba.sk
www – 9olejnik@st.fmph.uniba.sk
príklady – 8foldes@st.fmph.uniba.sk
všeobecne – bkms@pobox.sk

Podrobnejšie pravidlá sú rozpísané na poslednej strane týchto zadaní.

Všetkým účastníkom prajeme veľa chuti do práce, tešíme sa na Vaše riešenia a prípadné osobné stretnutia

Mgr. Pavel Petrovič		RNDr. Jaroslav Guričan, Csc.		Mgr. Jana Višňovská
Eňo Kováč	Maroš Ivančo	Dano Pártoš	Tino Irman	Šaňo Erdélyi
Juraj Kolesár	Vlado Marko	Jano Špakula	Juraj Földes	Tina Gancárová
Feri Kardoš	Juro Olejník	Martin Potočný	Dávid Pál	Kika Černeková
Peťa Fencíková	Martin Hriňák	Ľuboš Šesták	Tomáš Jurík	Hanka Tichá

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Bratislavský Korešpondenčný Matematický Seminár

Školský rok 2000/2001 — 1. séria letnej časti

BKMS

1. Finančníčka Tina sa učí narábať s peniazmi. Na začiatku má na stole 2 000 mincí na jednej veľkej kope. V jednom kroku môže vybrať jednu kopu (alebo už len kôpku) obsahujúcu aspoň 3 mince, vziať z nej jednu mincu, odložiť si ju do vrecka a zvyšné mince na kope (alebo už len kôpke) rozdeliť na dve kôpky (neprázdne a nie nutne rovnakej veľkosti). Avšak pozor, jej cieľom nie je to, aby čo najviac mincí skončilo v jej vrecku, ale chce takto získať na stole kôpky, ktoré obsahujú práve tri mince. Zistite, či sa jej to môže podariť.

2a. Kedysi malo BKMS 281 riešiteľov zo siedmich krajín (USA, Rusko, Ukrajina, Estónsko, ČR, Slovensko a Východ). V každej ľubovoľne vybratej šestici riešiteľov boli aspoň dvaja, ktorí mali rovnako rokov. Dokážte, že medzi riešiteľmi bola nejaká pätica ľudí, ktorí mali rovnako veľa rokov, boli rovnakého pohlavia a pochádzali z tej istej krajiny.

2b. Minulý rok malo BKMS už len 90 riešiteľov. Každý z riešiteľov BKMS mal aspoň 10 priateľov medzi ostatnými riešiteľmi. Dokážte, že ľubovoľný riešiteľ mohol pozvať na kofolu troch ďalších riešiteľov tak, že medzi nimi štyrmi mal každý aspoň dvoch priateľov.

3a. Štrnásť mincí bolo predložených pred najvyššieho a najobjektívnejšieho organizátora BKMS Šaňa. Skúsený Feldo sa od ešte skúsenejšieho a staršieho Eňa dozvedel, že mince číslo $1, 2, \ldots, 7$ sú falošné a mince $8, 9, \ldots, 14$ sú pravé. Šaňo, ale vie len to, že všetky pravé mince majú rovnakú hmotnosť a všetky falošné majú tiež rovnakú hmotnosť. Falošnú sú však ľahšie ako pravé. Feldo má rovnoramenné váhy bez závaží a chce dokázať, že mince $1, 2, \ldots, 7$ sú falošné. Ako to môže spraviť na tri váženia?

3b. V tej istej situácii ako v príklade **3a** chce skúsenejší Eňo dokázať Šaňovi, že mince $1, 2, \ldots, 7$ sú falošné, a mince $8, 9, \ldots, 14$ sú pravé. Ako to môže spraviť opäť len na tri váženia?

4a. Foto a Ďuri majú čudné zvyky. Vždy, keď chcú ísť na kofolu, zavolajú spoločne Kike a opýtajú sa: "Koľko?". Tá im povie nejaké prirodzené číslo, povedzme n. Potom títo dvaja začnú písať za seba do riadku cifry. Foto ako starší a skúsenejší napíše prvú cifru. Ďuri napíše za ňu druhú a takto sa v písaní striedajú až kým nenapíšu celé číslo (v desiatkovej sústave), ktoré je deliteľné 2^n. Potom sa poberú na kofolu s pocitom dobre vykonanej práce. Ďuri s Fotom sa fšak v škole flákali a naučili sa písať len cifry 1 a 2. Dokážte, že Kika nikdy nevymyslí také číslo n, aby Foto s Ďurim nemohli ísť na kofolu.

4b. Elefant si dal ťažké novoročné predsavzatie. Zobral si nekonečný štvorčekový papier s konečným počtom čiernych štvorčekov a zaumienil si, že z neho vystrihne konečný počet neprekrývajúcich sa štvorcov spĺňajúc tieto podmienky:
(1) Bude strihať len po čiarach štvorčekového papiera.
(2) Každý čierny štvorček bude súčasťou nejakého vystrihnutého štvorca.
(3) V každom štvorci bude obsah čiernej časti aspoň $\frac{1}{5}$ a najviac $\frac{4}{5}$ obsahu celého štvorca.
Dokážte, že Elefant môže toto predsavzatie splniť.

5a. Kráľ sa rozhodol postaviť v kráľovstve n miest a $n-1$ ciest medzi nimi tak, aby sa z každého mesta dalo dostať do každého. (Každá cesta spája dve mestá, cesty sa nepretínajú a neprechádzajú inými mestami.) Kráľ chcel aby najkratšie vzdialenosti medzi mestami boli 1 km, 2 km, ..., $\frac{1}{2}n(n-1)$ km. Zistite, či je to možné pre

a) $n = 6$, b) $n = 2\,001$.

5b. Tridsaťdva (slovom 32) účastníkov cestuje zo sústredenia BKMS objednaným autobusom. Každý z nich chce vystúpiť na inej zastávke, ktorá je na ceste autobusu. Vzdialenosť medzi týmito zastávkami je 5 km. Šesťo sa preto rozhodol usporiadať voľby o zastávkach, na ktorých sa bude stáť. Vyhlasuje týchto 32 zastávok v nejakom poradí. (Sám si zvolí v akom.) Každý účastník volí proti zastávke, ak vystupuje neskôr, volí za, ak vystupuje na tej zastávke, a zdržiava sa, ak vystupuje skôr (neuvažujú o tom, že ich zastávka nemusí neskôr prejsť). Ak je viac ľudí proti ako za, tak je zastávka vynechaná. Každý účastník, ktorého zastávka je vynechaná chce vystúpiť na najbližšej možnej (ak sú dve, tak na tej skoršej). Určte, aký je

a) najmenší, b) najväčší

možný počet zastávok, na ktorých autobus zastaví.

TERMÍN ukončenia tejto série je 1. marca.

POZOR Riešenia odoslané, resp. osobne doručené po tomto termíne nebudú opravované.

Bratislavský Korešpondenčný Matematický Seminár

Školský rok 2000/2001 — 2. séria letnej časti

Trojuholník

1. Do trojuholníka je vpísaný obdĺžnik $KLMN$ tak, že všetky jeho vrcholy ležia na stranách trojuholníka. Označme x, y dĺžky kolmých priemetov daného trojuholníka na priamky KL a LM. Dokážte rovnosť

$$\frac{|KL|}{x} + \frac{|LM|}{y} = 1.$$

2a. Nájdite aspoň jeden príklad trojuholníka, ktorý možno rozdeliť na

a) 12, b) 5

zhodných trojuholníkov.

2b. Nech n je prirodzené číslo, ktoré sa dá napísať ako súčet dvoch štvorcov (t.j. druhých mocnín prirodzených čísel). Dokážte, že potom existuje trojuholník, ktorý možno rozdeliť na n zhodných trojuholníkov.

3a. Daný je ostrouhlý trojuholník ABC. Zostrojte bod M ležiaci na strane AC taký, že prienik kruhov opísaných trojuholníkom ABM a CBM má minimálny obsah.

3b. Daný je pravouhlý trojuholník ABC s preponou AB. Nech F je priesečník jeho výšky CD a osi AE uhla BAC (pričom body D a E ležia postupne na stranách AB a BF). Nech G je priesečník úsečiek ED a BF. Dokážte, že štvoruholník $CEFG$ a trojuholník DBG majú rovnaký obsah.

4a. Daný je rovnoramenný trojuholník ABC so základňou BC. Kružnica k so stredom na strane BC sa dotýka jeho ramien AB a AC. Nech P a Q sú ľubovoľné body ležiace postupne na stranách AB a AC. Dokážte, že rovnosť

$$4|PB| \cdot |CQ| = |BC|^2$$

nastáva práve vtedy, keď PQ je dotyčnicou kružnice k.

4b. Na odvesnách AC a BC pravouhlého trojuholníka ABC sú postupne dané body D a E. Dokážte, že päty kolmíc z bodu C na priamky DE, AE, AB a BD ležia na jednej kružnici.

5a. Nech H je ortocentrum nerovnostranného trojuholníka ABC a O stred kružnice jemu opísanej. Priamky AH a AO pretínajú túto kružnicu postupne v bodoch M a N (rôznych od bodu A). Označme P, Q, R postupne priesečníky priamok BC a HN, BC a OM, HQ a OP. Dokážte, že štvoruholník $AORH$ je rovnobežník.

5b. Nech H je ortocentrum ostrouhlého trojuholníka ABC, pre ktorý platí $|AC| \neq |BC|$. Priamka prechádzajúca stredmi úsečiek AB a HC pretína os uhla ACB v bode D. Priamka HD prechádza stredom kružnice opísanej trojuholníku ABC. Určte veľkosť uhla ACB.

TERMÍN ukončenia tejto série je 29. marca.

POZOR Riešenia odoslané, resp. osobne doručené po tomto termíne nebudú opravované.
Vaše riešenia posielajte na adresu:

BKMS, KATČ, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Odporúčaná literatúra

L.C. Larson: Metódy riešenia matematických problémov
L. Bukovský, I. Kulvánek: Dirichletov princíp, ŠMM 25
R. Výborný: Matematická indukce, ŠMM 6
A. Vrba: Princip matematické indukce, ŠMM 40
J. Šedivý: Shodná zobrazení v konstruktivních úlohách, ŠMM 3
J. Šedivý: O podobnosti v geometrii, ŠMM 7
S. Horák: Kružnice, ŠMM 16

Prednášky k 1. a 2. sérii

budú **19.2.**, resp. **19.3.** o 16^{00} hod. v matematickom pavilóne FMFI UK v Mlynskej doline (autobusy č. 31, 39 – zastávka pri budove televízie, autobus č. 32, 29 a električky č. 1, 4, 5, 9, 12 – zastávka pri internáte Družba). Stretneme sa pri vrátnici matematického pavilónu o 15^{55}. Všetkých záujemcov pozývame a tešíme sa na stretnutie s vami.

Pravidlá

- Riešenie každého príkladu píšte na samostatný papier formátu A4. Ku každému príkladu uveďte svoje meno, triedu, školu a adresu!
- Príklady riešte samostatne. V prípade, že v časti či celom riešení používate odbornú literatúru, uveďte jej názov, autora, vydavateľstvo, rok vydania a stranu. Za opísané riešenie, riešenie využívajúce výpočtovú techniku a riešenie bez zdôvodnenia spravidla nedostanete veľa bodov.
- Pokiaľ máte dojem, že vaše riešenie bolo nesprávne obodované, môžete do jedného týždňa poslať písomnú sťažnosť. Nezabudnite k nej priložiť aj originál sporného riešenia.
- Príklady 2b a 3b musia riešiť tí študenti matematických tried GAMČA, GVOZA, G Tajovského BB, G Párovská NT, G Poštová KE, G Alejová KE a všetkých českých gymnázií so zameraním na matematiku, ktorí dosiahli aspoň v jednom konečnom poradí najmenej 45 bodov. Ostatným sa bude započítavať lepší z príkladov 2a, 2b (resp. 3a, 3b).
- Príklady 4b a 5b musia riešiť tí tretiaci a štvrtáci, ktorí aspoň v dvoch záverečných poradiach získali minimálne 45 bodov. Ostatným študentom sa bude započítavať lepší z príkladov 4a, 4b (resp. 5a, 5b).
- Limit na získanie 5-bodovej prémie je pre študentov k-teho ročníka 14+2k bodov.
- Naďalej sú vítané riešenia v angličtine a češtine a riešenia písané v TEXu.

Výlety

Aj v novom tisícročí sa môžete tešiť na tradičné výlety BKMS. Dojmy a snáď aj fotky zo sútredenia v Trenčianskom Jastrabí si vymeníme už v sobotu **17.2.** v rámci klasického rekreačno-turistického výletu, zraz o 10:00 na Patrónke. Ďalšie kondično-náučné výlety s rovnakým zrazom usporiadame v soboty **10.3.** a **31.3.** Doneste si hlavne teplé, vkusné a športové oblečenie, dobrú obuv, jedlo, KPZ-ku a dobrú náladu. V apríli obnovíme taktiež tradíciu cyklistických výletov, vrcholom však bude tradičný Veľký Aprílový Výlet BKMS, ktorého termín upresníme v zadaniach 3. série.

.... TU ODSTRIHNÚŤ!!! ....

PRIHLÁŠKA DO LETNEJ ČASTI BKMS 2000/2001 – **posielať spolu s 1.sériou!**

Meno a priezvisko: ....
Škola: .... Trieda ....
Adresa domov: ....
Adresa pre poštu (domov – internát – škola): ....
Dátum narodenia: ....
Telefón: .... e-mail: ....

Pozor! Podmienkou posielania korešpondencie domov je zaslanie štítkov alebo obálok s adresami!